Guía de ejercicios matemáticos resueltos para sucesiones, series, ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales.

$$a_1(x)\frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_2(x)\frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x)y(x) = f(x)$$

Autor: Venancio E. Besson P.

Introducción

La siguiente es una guía de ejercicios matemáticos orientados a la resolución de sucesiones, series, series de potencia considerando los polinomios de Taylor y en su mayoría a resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. La misma cuenta con 25 ejercicios (enunciados con sub-ejercicios) completamente resueltos paso a paso y otros pocos ejercicios propuesto a modo de tarea. Este material no pretende ser teórico en cuanto a los temas a tratar ni es recomendado considerarlo un sustituto para las clases presenciales o la teoría expuesta en bibliografía relacionada, se recomienda utilizarlo como un material de apoyo didáctico para reforzar conocimiento. Para hacer énfasis en ciertos temas considerados de mayor importancia se agregaron breves notas teóricas en las sub-secciones de la guía (pueden encontrarse también dentro de los ejercicios), contando con resúmenes, notas, y explicaciones que pudieran ser de ayuda.

En su mayoría el material disponible fue recopilado de los textos : *Problemas y ejercicios de análisis matemáticos revisados por el profesor B. Demidovich*, *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera Boyce Diprima*, evaluaciones parciales aplicadas en la Universidad Simón Bolívar y material ocasional considerado pertinente.

Para la edición se utilizó el programa Tex Maker como editor de texto y el compilador LaTeX , en la resolución de cuentas fue de ayuda el programa de cálculo PTC MathCad prime y Matlab, este último también fue de ayuda para diseñar las gráficas incluidas. La referencia a estos tres últimos programas no es en vano, a lo largo de la carrera de ingeniería los cálculos a realizar son altamente complicados, extensos y no lineales; para enfrentar estos inconvenientes es recomendado desde este momento instruirse en el aprendizaje de herramientas computacionales de cálculo, a fin de cuentas en la práctica real de nuestros conocimientos se nos pedirá tener diferentes ejercicios matemáticos resueltos al instante para proceder a su interpretación, el tiempo invertido en las "cuentas" no se nos permitirá ser mucho si queremos ser eficientes. No está de menos mencionar que un editor de textos científicos, rápido y versátil será siempre de utilidad al momento de presentar un trabajo, por esto (y además de ser gratuito) también es recomendado LaTeX como primera opción.

Índice

Secciones	Página
1. Sucesiones	**1**
2. Series	**6**
2.1. Resumen de los criterios de convergencia-divergencia	6
2.2. Definiciones de importancia	7
3. Serie de Taylor	**21**
4. Ecuaciones diferenciales ”por cambios de variables”	**28**
4.1. Apariencia de ciertas ecuaciones diferenciales a tratar	28
5. Trayectorias ortogonales	**39**
6. Ecuaciones diferenciales de n-ésimo orden	**42**
7. Ecuaciones diferenciales tipo Euler	**50**
8. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales	**53**

1. Sucesiones

Ejercicio 1.1:

Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones.

$$\text{a) } a_n = \left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)^n \quad , \quad \text{b) } a_n = \left(\frac{3n-2}{5-3n}\right)^{\frac{n}{n+1}} \quad , \quad \text{c) } a_n = n\left(\sqrt[n]{9}-1\right)$$

Solución:

a)

Se desea estudiar la convergencia probando directamente si existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dada la dificultad que esto representa se pasa a estudiar una función cuyo dominio sea el rango de a_n y se espera que en el infinito tal $f(a_n)$ tenga límite, si esto es así, con $f^{-1}(a_n)$ será posible regresar al valor que arrojaría a_n. La función que tomaremos en este caso será la del logaritmo neperiano, ya que será de utilidad.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)^n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)^n\right]$$

Recuerde que dada la continuidad de la función logaritmo natural, es posible encontrar el límite de su argumento cuando haga falta.

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)^n\right] \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} n\ln\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\cdot\frac{1/n}{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)}{1/n}$$

Es claro que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, pero... ¿Y el numerador?

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+2n}-n\right) \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{\sqrt{n^2+2n}+n} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}\cdot\frac{1/n}{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+2/n}+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\ln\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right) = 0$$

Así $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)}{1/n} = \frac{0}{0}$

Ahora si consideramos una función $f(x)$ cuyo comportamiento continuo de su variable continua x se parezca al comportamiento discreto de la variable n, entonces con esa función sera posible estudiar el comportamiento en el infinito de $f(n)$, más aún podremos aplicar Lôpital para resolver el límite que nos queda pendiente.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)}{1/x} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\frac{-\left(x^2-x\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{x-\sqrt{x^2+2x}+2} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}-\left(x^2-x\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}x-\sqrt{x^2+2x}+2} = \frac{-1/2}{1}$$

Los dos últimos límites se pueden calcular usando la multiplicación por conjugado. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)^2\right] = \frac{-1}{2}$$

Pero regresando al dominio de a_n y tomando la función inversa del $\ln(n)$ tenemos el resultado.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-1/2}$$

b)

Teniendo en cuenta la continuidad de la función exponencial

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-2}{5-3n}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{5-3n} \cdot \frac{1/n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-2/n}{5n-3} = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = (-1)^1 = -1$$

c)

Método 1:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{9}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{9}-1\right) \cdot \frac{1/n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{9^{1/n}-1}{1/n} = \frac{0}{0} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{9^{1/x}-1}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{9^{1/x}\ln(9)(1/x^2)}{1/x^2} = \lim_{x\to\infty} 9^{1/x}\ln(9) = \ln(9) = 2\ln(3)$$

Método 2:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{9}-1\right) \quad ; \quad \frac{1}{n} = k \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \sin \to \infty \\ k \to 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k}\left(9^k-1\right) = \frac{0}{0} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{9^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{9^x\ln(9)}{1} = 2\ln(3)$$

Respuesta:

Los límites de las tres sucesiones existen, por lo tanto las mismas convergen a estos

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-1/2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2\ln(3)$

Ejercicio 1.2:

Estudiar la convergencia de la siguientes sucesiones

$$\text{a) } a_{n+1} = \sqrt{\frac{15}{4} + a_n} \ , \ a_1 = 3 \ \ ; \ \ \text{b) } a_{n+1} = \sqrt[3]{4 + a_n^2} \ , \ a_1 = 1 \ , \ \forall \ \ n \geq 1 \ \ ;$$

$$\text{c) } a_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \ , \ n \geq 2$$

Respuesta:

a)

Si logramos estudiar la monotonía de la sucesión y luego ver si está acotada, será posible determinar si la misma converge o no.

$$\begin{array}{rl} \text{si crece} \ \ a_{n+1} > a_n & \Rightarrow \quad a_{n+1} - a_n > 0 \\ \text{si decrece} \ \ a_{n+a} < a_n & \Rightarrow \quad a_{n+1} - a_n < 0 \end{array}$$

Estudiemos entonces el signo del término $a_{n+1} - a_n$.

Debe ser posible ver que si $a_{n+1} = \sqrt{\frac{15}{4} + a_n} \quad \Rightarrow \quad a_n = \sqrt{\frac{15}{4} + a_{n-1}}$. Esto se hace para tener expresiones lo más cómodas posibles para estudiar la monotonía

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{\frac{15}{4} + a_n} - \sqrt{\frac{15}{4} + a_{n-1}} = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2}{c} \quad , \quad c > 0 \quad \Rightarrow$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{c}$$

Debemos estudiar entonces el signo del numerador, para esto es la condición $a_1 = 3$, usando a_{n+1} y su expresión encontraremos $a_2 = a_n$ y $a_1 = a_{n-1}$.

$$a_2 = \sqrt{\frac{15}{4} + 3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n - a_{n-1}}{c} = \frac{a_2 - a_1}{c} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 3 = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3} - 2\right) < 0$$

Si no se esta satisfecho se pueden calcular más términos, pero ya es visible que la función decrece $a_{n+1} - a_n < 0 \ \Rightarrow \ \ a_{n+1} < a_n$. Observando que $a_{n+1} = \sqrt{\frac{15}{4} + a_n} > 0$, entonces es fácil decir que la sucesión no arrojará términos negativos, así $a_n > 0$ y cero es una cota inferior para a_n, entonces la sucesión converge. Es posible calcular su límite (estrictamente hablando, no es su límite definitivo, pero se puede decir que sería su mejor candidato a límite).

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L \ \ ; \ \ \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{15}{4} + L} \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{\frac{15}{4} + L} \quad \Rightarrow$$

$$L^2 - L - \frac{15}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} L = 5/2 \\ L = -3/2 \end{array}$$

Se toma $L = 5/2$ por ser positivo.

b)

Se seguirá el razonamiento anterior

$$a_n = \sqrt[3]{4 + a_{n-1}^2} \quad , \quad a_{n+1} - a_n = \sqrt[3]{4 + a_n^2} - \sqrt[3]{4 + a_{n-1}^2} = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$$

Recordar que $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \cdot \frac{\sqrt[3]{a}^2 + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b}^2}{\sqrt[3]{a}^2 + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b}^2} = \frac{\sqrt[3]{a}^3 - \sqrt[3]{b}^3}{\sqrt[3]{a}^2 + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b}^2} = \frac{a - b}{c} = \frac{4 + a_n^2 - 4 - a_{n-1}^2}{c}$$

La pregunta ahora es si el numerador es positivo o negativo, para esto utilizamos que $a_1 = 1$, $\forall \quad n \geq 1$, digamos $n = 2$

$$\left.\begin{aligned} a_n = a_2 = \sqrt[3]{4 + a_1} = \sqrt[3]{5} \\ a_{n-1} = a_1 = 1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad a_n^2 - a_{n-1}^2 = -1 + 5^{2/3} > 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} > a_n$$

La sucesión es creciente, si asumimos que existe su límite, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt[3]{4 + L^2} \quad \Rightarrow$$

$$L = \sqrt[3]{4 + L^2} \quad \Rightarrow \quad L^3 - L^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (L - 2)(L^2 + L + 2) = 0$$

Entonces elmejor candidato para un límite en esta sucesión sería $L = 2$ dado que es la única raíz del polinomio positiva y real. Entonces para este estudio a_n converge.

c)

Lo primero es tener en cuenta que la expresión algebraica dada no es una forma cerrada de a_n, es una representación de la misma mediante productos, y es con esto con lo que debemos trabajar. Véase que $a_n \neq 0$ y que $a_n > 0$, entonces es posible hacer lo siguiente para estudiar la monotonía, que como ya vimos es lo que deberíamos buscar primero en ejercicios como estos.

Supongamos que la serie decrece $a_{n+1} < a_n \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, ¿Cómo es a_{n+1}?

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

Entonces es posible hacer el siguiente cálculo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1 - 1/9)(1 - 1/16) \cdots (1 - 1/(n+1)^2)}{(1 - 1/4)(1 - 1/9)(1 - 1/16) \cdots (1 - 1/n^2)} = \frac{1}{1 - 1/4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(n+1)^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{4}{3} \frac{n^2(n+2)}{(n-1)(n+1)^3} < 1 \quad ?$$

El menor valor que puede tomar n es 2, si $n = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{27} = \frac{64}{81} \approx 0,7901 < 1$

La serie no es alternada por lo que no se pueden esperar oscilaciones de valor de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, además el denominador como polinomio es mayor que el numerador, así si n aumenta la fracción disminuye, entonces la sucesión es decreciente, más aún, la misma nunca arrojará valores negativos, entonces podemos decir que cero es una cota inferior de a_n. a_n decrece y esta acotada inferiormente, entonces la sucesión converge. Intentemos calcular su límite.

Lo primero es buscar una expresión cerrada con la que podamos trabajar. La idea es darse cuenta de que los términos multiplicados son un binomio cuadrado que puede modificarse a conveniencia.

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)\cdots\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2-1}{n^2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

Respuesta:

Las tres sucesiones convergen, los siguientes límites son los mejores candidatos para su convergencia

a) $\frac{5}{2}$

b) 2

c) $\frac{1}{2}$

2. Series

2.1. Resumen de los criterios de convergencia-divergencia

Sean las series $s_{1n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $s_{2n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

1.) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ entonces la serie diverge, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ no se puede concluir nada.

2.) Sea $a_n \neq 0$

2.1) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 < 1$, la serie converge absolutamente.

2.2) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, la serie converge absolutamente.

2.3) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 > 1$ ó ∞, a serie diverge.

2.4) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ó ∞, la serie diverge.

2.5) Si alguno de los límites anteriores es igual a 1, entonces no se puede concluir nada.

3.) Sea $f(x)$ una función continua, decreciente y positiva para toda $x \geq a$, entonces la serie infinita $\sum\limits_{n=a}^{\infty} f(n)$ converge si $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ converge, y diverge si la integral también lo hace.

4.) Criterio de comparación I

4.1) Si s_{1n} es una serie de términos positivos que se sabe que converge y $b_n \leq a_n$ para todo número entero positivo n, entonces s_{2n} converge.

4.2) Si s_{1n} es una serie de términos positivos que se sabe que diverge y $b_n \geq a_n$ para todo número entero positivo n, entonces s_{2n} diverge.

5.) Criterio de comparación II (por paso al límite)
Si s_{1n} y s_{2n} son series de términos positivos

5.1) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C > 0$, ambas series se comportan igual (o ambas convergen o ambas divergen).

5.2) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C = 0$ y s_{2n} converge, entonces s_{1n} converge.

5.3) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ y s_{2n} diverge, entonces s_{1n} diverge.

6.) Evaluar los siguientes casos especiales

6.1) La serie geométrica: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$, diverge si $|r| \leq 1$

6.2) La serie P: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, converge si $p > 1$, diverge si $p \leq 1$

6.3) La serie alternante: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ ó $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$. Si $a_n > 0$ y $a_{n+1} < a_n$ para todos los enteros positivos n, y si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie alternante es convergente.

6.4) La serie telescópica: Si una serie $\sum\limits_{n=c}^{\infty} a_n$ es posible expresarla en la forma $\sum\limits_{n=c}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ o en la forma $\sum\limits_{n=c}^{\infty}(b_{n+1} - b_n)$, entonces

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=c}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_c - b_{n+1}, \quad \text{y converge a } \; b_c \; \text{ si } \lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} = 0 \\ \\ \sum\limits_{n=c}^{\infty}(b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_c, \quad \text{y converge a } \; -b_c \; \text{ si } \lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} = 0 \end{cases}$$

2.2. Definiciones de importancia

1.) Definición de convergencia absoluta: La serie s_{1n} es absolutamente convergente si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ es convergente.

2.) Definición de convergencia condicional: Una serie que es convergente, pero no absolytamente convergente, se denomina condicionalmente convergente.

3.) Teorema: Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ es convergente, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

4.) Definición de factorial: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$

Ejercicio 2.1:

Calcular la suma de las siguientes series

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \quad , \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+3}}{9^{n+1}} \quad , \quad \text{c)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left[(1+1/n)^n(n+1)\right]}{\ln(n^2)\ln\left[(n+1)^{n+1}\right]}$$

Solución:

a)

$$a_n = \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n)^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\cdots\right] = \frac{1}{2}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n+3}}{9^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2^2\right)^n 2^3}{\left(3^2\right)^n 3} = \frac{2^3}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n \quad , \quad \frac{a}{1-r} = \sum_{n=1}^{\infty} ar^n \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{1-4/9} = \frac{8}{5}$$

c)

$$a_n = \frac{\ln\left[(1+1/n)^n(n+1)\right]}{\ln(n^2)\ln\left[(n+1)^{n+1}\right]} = \frac{\ln\left[\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\right]}{\ln(n^n)\ln\left((n+1)^{n+1}\right)} = \frac{1}{n\ln(n)} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \quad , \quad \text{serie telescópica} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\ln(n)} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right) = \frac{1}{2\ln(2)} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = \frac{1}{2\ln(2)}$$

Respuesta:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{8}{5}$

c) $\frac{1}{2\ln(2)}$

Tarea: Demostrar la suma de la siguiente serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+6n^2+11n+6} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 2.2:

Estudiar la convergencia de las siguientes series.

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} \quad , \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\cosh(n)} + \frac{1}{(1+n)\ln^2(n+1)} \right)$$

a) Se usará el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n 3(n+1)!}{(n+1)^n(n+1)} \cdot \frac{n^n}{3^n n!}$$

En este punto sería bueno entrenarse en el álgebra de los factoriales para casos como el que nos aparece, la idea es siempre utilizar la definición tal cual

$$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots((n+1)-3)\cdot((n+1)-2)\cdot((n+1)-1)\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n} =$$

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n} = (n+1)$$

Regresando al ejercicio

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = 3\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3\lim_{n\to\infty} \exp\left(n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) = 3\exp\left(\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) \quad ,$$

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{1/n} = \frac{0}{0}$$

Entonces pasando a tomar una función de variable continua y aplicando Lôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(1/x^2\right)(1+1/x)}{(-1/x^2)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3e^{-1} = \frac{3}{e} > 1 \quad \Rightarrow \quad \text{la serie diverge}$$

b) Se usará el criterio de la integral

$$\begin{cases} \frac{1}{\cosh(n)} \quad \text{es claramente decreciente} \\ \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(1+x)\ln^2(x+1)}\right) = \frac{-(\ln(x+1)+2)}{\ln^3(x+1)(x+1)^2} \quad \text{siempre decreciente} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(1+n)\ln^2(n+1)} \quad \text{siempre decreciente} \end{cases}$$

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{\cosh(x)} + \frac{1}{(1+x)\ln^2(x+1)}\right) \quad \Rightarrow \quad \int_1^b \frac{dx}{\cosh(x)} + \int_1^b \frac{1}{(1+x)\ln^2(x+1)} \quad , \quad b\to\infty$$

$$\int_1^b \frac{dx}{\cosh(x)} = 2\left[\tan^{-1}\left(e^b\right) - \tan^{-1}(e)\right] \quad \text{si} \quad b\to\infty \quad \Rightarrow \quad \int_1^b \frac{dx}{\cosh(x)} = 2\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(e)\right] \neq \infty$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)\ln^2(x+1)} = \frac{1}{ln(2)} - \frac{1}{\ln(b+1)} \quad \text{si} \quad b \to \infty \quad \Rightarrow \quad \int_{1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)\ln^2(x+1)} = \frac{1}{\ln(2)} \neq \infty$$

Ambas integrales convergen, entonces la serie converge.

Respuesta:

a) Diverge

b) Converge

Ejercicio 2.3:

Estudiar la convergencia de las siguientes series

$$\text{a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \quad , \quad \text{b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}} \quad , \quad \text{c)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}} \quad , \quad \text{d)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln\left(n^4+1\right)}$$

Solución:

a) Por el teorema de la integral

$f(x) = \frac{1}{x^{2/3}}$ es siempre decreciente y continua en $[1, \infty)$.

$$\int_1^b \frac{dx}{x^{2/3}} = \left[3x^{1/3}\right]_1^b = 3b^{1/3} - 3, \quad \text{si} \quad b \to \infty \quad \text{la integral diverge, por lo tanto la serie tambien}$$

b) Por el teorema de comparación II

Ya que esta sumatoria se parece a la anterior es muy posible que igual diverja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2-1}} \cdot \frac{1/n^{2/3}}{1/n^{2/3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}\left(n^2-1\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}} = 1 \neq 0, \infty$$

Entonces la serie diverge.

c) Por el teorema de comparación II

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}-n^{1/2}}, \quad \text{estudiemos} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^{4/3}} \quad \text{siempre decreciente y continua en} \quad [1, \infty)$$

$$\int_2^b \frac{1}{x^{4/3}} = \left[\frac{-3}{\sqrt[3]{x}}\right]_2^b = 3 - \frac{3}{\sqrt[3]{b}}, \quad \text{si} \quad b \to \infty \quad \text{la integral converge, entonces la serie tambien}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{4/3}}{n^{4/3}-n^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{4/3}}{n^{4/3}-n^{1/2}} \cdot \frac{1/n^{4/3}}{1/n^{4/3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-n^{-5/6}} = 1 \neq 0, \infty \quad \text{la serie entonces converge}$$

d) Por el teorema de comparación II

Dada nuestra experiencia con este tipo de series intentemos compararla directamente con una similar a ella, luego veremos como es el comportamiento de esta otra.

$$\text{Comparemos con la serie } \ s_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n^4)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\ln\left(n^4\right)}{n\ln\left(n^4+1\right)} = 4\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{\ln\left(n^4+1\right)} = \frac{\infty}{\infty}, \quad \text{aplicando L'H} \quad \Rightarrow$$

$$4\lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{4x^3/\left(x^4+1\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4+1}{x^4} = 1 \neq 0, \infty$$

Concluimos que ambas series se comportan igual, ahora estudiemos s_2. Utilizaremos el criterio de la integral.

$$f(x) = \frac{1}{x\ln\left(x^4\right)} \quad \Rightarrow \quad \int_2^b \frac{dx}{x\ln\left(x^4\right)} = \left[\frac{\ln\left(\ln\left(x^4\right)\right)}{4}\right]_2^b = \frac{1}{4}\left(\ln\left(\ln\left(b^4\right)\right) - \ln\left(\ln(16)\right)\right)$$

si $b \to \infty$ la integral diverge, entonces s_2 diverge, entonces la serie del ejercicio diverge

Respuesta:

a) Diverge , b) Diverge , c) Converge , d) Diverge

Nota: Aunque este ejercicio puede parecer fácil o repetitivo la verdad es que está diseñado para ayudar al lector a familiarizarse con estos métodos particulares de estudio de convergencia (comparación II e integral), por ejemplo, pedir el estudio de la serie b) sin haber presentado primero la serie en a) hubiera podido representar un esfuerzo mayor para este ejercicio. También se busca dejar de lado los teoremas del cociente y la raíz para series que "luzcan" como estas ya que de aplicarlos darían el nefasto resultado de que el límite es 1.

Si las condiciones se cumplen y es posible integrar, pues se integra, si la serie se parece "mucho" a otra, entonces se compara. No trate tampoco de crearse una regla general-total para las series basada es estas ideas, intente desarrollar un "olfato" en base a su experiencia (práctica) para enfrentarse a este tipo de ejercicios. En este particularmente intentamos enseñarle como hacerlo.

Tarea: Estudiar la convergencia de las siguientes series

$$\text{a)} \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad , \quad \text{b)} \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} \quad , \quad \text{c)} \ \sum_{n=2}^{\infty} \left(n^{1/n} - 1\right)^n$$

Ejercicio 2.4:

Estudiar la convergencia de las siguientes series alternantes

$$\text{a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \ln(n)} \quad , \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}} \quad , \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{3n} \quad ,$$

$$\text{d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n^n \cdot n!} \quad , \quad \text{e)} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-1)n^2}{(n+1)^{n^2}}$$

Solución:

a) Estudiemos inmediatamente la convergencia absoluta

Para eso estudiamos $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \ln(n)}$, y buscamos utilizar el teorema de comparación II con $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que se sabe que converge.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{n^2 \ln(n)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0, \quad \text{La serie converge absolutamente.}$$

b) Estudiemos convergencia condicional

Para este estudio deben recordarse las condiciones expuestas al inicio del capitulo en la sección 6.3)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} > 0 \ \ \forall \ \ x > 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-1/3}{\sqrt[3]{(x+1)^4}}, \quad \text{función decreciente}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} = 0 \ \ \text{la series es condicionalmente convergente.}$$

c) Estudiemos la convergencia absoluta

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{3n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^3 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+1}\right)^3 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+1} \cdot \frac{1/n}{1/n} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} < 1 \quad , \quad \text{la serie converge absolutamente}$$

d) Estudiaremos convergencia absoluta

A primera vista esta serie parece no ser alternante, pero está en este ejercicio apropósito para hacer ver que sí lo es y evitar confusiones en ejercicios que el lector pueda encontrarse en el futuro, más aún esta serie deberá ser expresada de otra forma para así trabajar con ella más cómodamente. Vea que si $n = 0, 1, 2, ...$, entonces

$cos(\pi n) = (-1)^n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n^n \cdot n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n \cdot n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}(n+1)!} \frac{n^n n!}{(-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n n!}{(n+1)^{n+1} \cdot n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \frac{1}{(n+1)^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2}, \quad \text{el paso anterior solo es posible si ambos límites existen.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = 1^\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \exp\left(n \ln\left(\frac{n}{n+1} \right) \right) \quad , \quad \lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n}{n+1} \right) \cdot \frac{1/n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{1/n} = \frac{0}{0},$$

$$\text{L'H} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x+1}{x} \frac{1}{(x+1)^2}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = e^{-1} \cdot 0 = 0 < 1$$

Entonces la serie converge absolutamente.

e)

$$a_n = (-1)^n \frac{(n-1)n^2}{(n+1)^{n^2}}, \quad |a_n| = b_n = \frac{(n-1)n^2}{(n+1)^{n^2}}$$

Convergencia condicional. Estudiemos la monotonía de b_n por simple evaluación numérica.

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
b_n	0	0	$4/3^4$	$2 \cdot 3^2/4^9$	$3 \cdot 4^2/5^{16}$

Podemos ver que para $n > 2$ el denominador de b_n crece mucho más rápido de lo que crece su numerador, claramente b_n es decreciente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n^2}{(n+1)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - n^2}{(n+1)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 1/n}{\left(n^{\left(\frac{n^2-3}{n^2}\right)} + n^{\left(\frac{-3}{n^2}\right)} \right)^{n^2}} = 0$$

La serie converge condicionalmente

Convergencia absoluta. Utilizamos el teorema de comparación por paso al límite con la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que se sabe que converge.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n-1)n^2}{(n+1)^{n^2}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5 - n^4}{(n+1)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 1/n}{\left(n^{\left(\frac{n^2-5}{n^2}\right)} + n^{\left(\frac{-5}{n^2}\right)} \right)^{n^2}} = 0$$

La serie converge absolutamente.

Respuesta:

a) Converge absolutamente

b) Converge condicionalmente

c) Converge absolutamente

d) Converge absolutamente

e) Converge absolutamente

Nota: Las convergencias que faltaron se dejan como tarea.

Ejercicio 2.5:

Hallar el radio de convergencia de las siguientes series

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-5)^n}{n3^n}\quad,\quad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}\quad,\quad \text{c)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\pi}{n}\right)^{\pi n^2}(x-1)^{2n}\quad,$$

$$\text{d)}\ \sum_{n=1}^{\infty}x^{n!}\ \text{ y }\ \sum_{n=1}^{\infty}n!x^{n!}\ \text{ si se sabe que la siguente serie es divergente }\ \sum_{n=1}^{\infty}1^{n!}$$

Solución:

a)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(x-5)^n(x-5)}{(n+1)3^n3}\cdot\frac{n3^n}{(-1^{n-1}(x-5)^n}\right| =$$

$$\frac{|x-5|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{|x-5|}{3} < 1 \quad\Rightarrow\quad 2 < x < 8$$

<u>si $x=2$</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-5)^n}{n3^n}\quad\Rightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-3)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}(3)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n},\quad \text{diverge}$$

<u>si $x=8$</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-5)^n}{n3^n}\quad\Rightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

A esta última serie se le debe hacer estudio de CONVERGENCIA CONDICIONAL, en efecto converge, su módulo es decreciente y el límite cuando $n\to\infty$ es cero.

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{2n}(x-3)^2(n+1)\ln(n+1)}{(n+2)(x-3)^{2n}\ln(n+2)}\right| = |x-3|^2\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)}{(n+2)\ln(n+2)},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln(x+2)} = \frac{\infty}{\infty}\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to\infty}\frac{1/(x+1)}{1/(x+2)} = 1\ \text{ y }\ \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = 1\quad\Rightarrow\quad |x-3|^2\cdot 1 < 1\quad\Rightarrow\quad 2 < x < 4$$

<u>si $x=2$ ó $x=4$</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$$

La cual sabemos que diverge por el teorema de la integral.

c)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(1+\pi/n)^{\pi n^2}(x-1)^{2n}\right|} = |x-1|^2 \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\pi}{n}\right)^{\pi n} \quad \Rightarrow \quad |x-1|^2 e^{\pi^2} < 1 \quad \Rightarrow \quad 1-e^{-\frac{\pi^2}{2}} < x < 1+e^{-\frac{\pi^2}{2}}$$

<u>si $x = 1-e^{-\frac{\pi^2}{2}}$</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\pi}{n}\right)^{\pi n^2}\left(1-e^{-\frac{\pi^2}{2}}-1\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\pi/n)^{\pi n^2}}{e^{\pi^2 n}}$$

Lo interesante del paso que sigue está en que uno bien podría empezar a estudiar esta serie y ver si converge o no por los muchos métodos ya practicados, cuando la verdad basta aplicar el menos (o para nada) utilizado hasta ahora, el que corresponde a 1) al inicio de esta sección.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\pi/n)^{\pi n^2}}{e^{\pi^2 n}} = e^{\frac{-\pi^3}{2}}$$

La serie diverge, este mismo caso se presenta si $x = 1+e^{-\frac{\pi^2}{2}}$

d)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{(n+1)!}}{x^{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|n^{n!n}\right|$$

A partir de aquí hay que dejar la carpintería y pensar un poco. Solo se puede continuar si nos damos cuenta que valores puede tomar x para seguir la cuenta, si x vale 2 por ejemplo, que pasaría para un exponente que crece a una velocidad alarmante como lo permite el $n!n$, es imposible que converja a algún valor, ¿ Si $x=3$ acaso no tendríamos el mismo caso?, o por ejemplo $x=-5,3$, pasaría lo mismo solo que tendería al infinito negativo. ¿ Y si los valores de x los limitáramos a números que a medida que crece el exponente, disminuyera el valor de la expresión ?, bueno ya que vemos que $|x|>1$ no puede converger a ningún valor, entonces consideremos $|x|<1$. Matemáticamente tenemos

$$|x|>1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left|n^{n!n}\right| = \infty, \quad |x|<1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left|n^{n!n}\right| = 0 < 1$$

Recordando además el dato de ayuda del ejercicio, tenemos $-1<x<1$.

Para la segunda serie, debemos tener claro entonces que si tiene alguna oportunidad de converger, deberá hacerlo en $|x|<1$.

$$\lim_{n\ \infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\ \infty}\left|(n+1)x^{n!n}\right|$$

Usando el teorema del emparedado.

$$\lim_{n\ \infty}\left|(n+1)x^{n!n}\right| < \lim_{n\ \infty}\left|(n+1)x^{n}\right|, \quad \lim_{n\ \infty}(n+1)\left|x^n\right| = \lim_{n\ \infty}\frac{n+1}{1/\left|x^n\right|} = \frac{\infty}{\infty}, \text{L'H} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{n\ \infty}\frac{1}{-1/\left|x^n\right|} = 0 < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\ \infty}\left|(n+1)x^{n!n}\right| = 0$$

Respuesta:

a) $2 < x \leq 8$

b) $2 < x < 4$

c) $1 - e^{-\frac{\pi^2}{2}} < x < 1 + e^{-\frac{\pi^2}{2}}$

d) $|x| < 1$

Ejercicio 2.6:

Estudiar la convergencia de las siguientes series alternantes

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1-n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad , \quad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2n+1}\right) \quad ,$$

Solución:

a)

$$a_n=(-1)^{n+1}\left(1-n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad , \quad b_n=|a_n|=1-n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Estudiemos primero la convergencia condicional, recuerde que esto es ver si $\sum a_n$ converge, para tal estudio necesita cumplirse lo siguiente: $b_n > b_{n+1}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Estudiemos la monotonía.

$$\text{Sea}\ \ f(x)=1-x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)-\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

¿ Cómo saber el signo de $f'(x)$? Bueno, véase que no importa el valor de $f(1)$, los estudios deben ser a partir de $n=2$. Recuerde que el máximo valor que pueden tomar el seno y el coseno es 1, si en la función derivada el valor del coseno siempre se esta haciendo más pequeño ya que esta siendo dividido por el mismo valor de x, el seno siempre será mayor sin importar lo que pase y como tiene signo negativo la función siempre será negativa, este es el razonamiento lógico que debería bastar, si no se esta conforme, veámoslo analíticamente

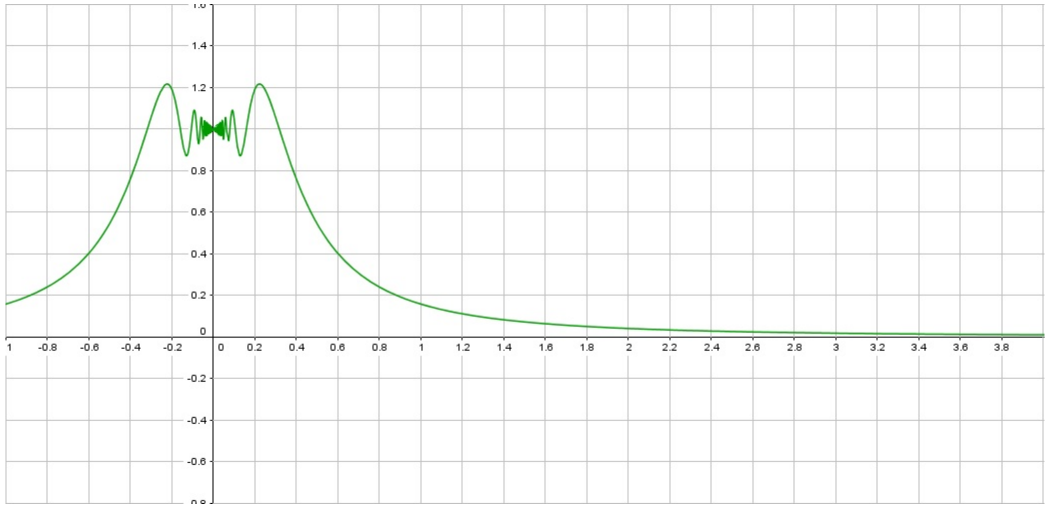
$$\begin{aligned}
n=2 \quad &\Rightarrow \quad f'(2)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\right)-\sin\left(\frac{1}{2}\right)\\
n=3 \quad &\Rightarrow \quad f'(3)=\frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\right)-\sin\left(\frac{1}{3}\right)\\
n=4 \quad &\Rightarrow \quad f'(4)=\frac{1}{4}\cos\left(\frac{1}{4}\right)-\sin\left(\frac{1}{4}\right)\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Si aumenta n lo que arroje el coseno quedará siempre por debajo de lo que arroje el seno, para fines prácticos esto es suficiente, pero aún así podemos graficar $f(x)$.

Evaluemos el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)=1-\lim_{n\to\infty}n\sin\left(\frac{1}{n}\right)=1-1=0$$

La serie converge condicionalmente, pasemos a estudiar la convergencia absoluta por el teorema de comparación



II.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(1 - x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(x^2 - x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right); \quad \begin{matrix} \frac{1}{x} = t \\ x = \frac{1}{t} \end{matrix} \quad \text{si} \quad n \to \infty \quad \Rightarrow \quad t \to 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}\sin(t)\right) = \lim_{t\to 0}\frac{t^3 - t^2\sin(t)}{t^5}, \text{ L'H} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to 0}\frac{20\cos(t) - t^2\cos(t) - 10t\cos(t)}{120} = \frac{1}{6} \neq 0, \infty$$

Ambas series se comportan igual y la serie converge absolutamente.

b)

$$f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2n+1}\right) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-1}{2n^2 + 2n + 1} < 0, \quad \lim_{n\to\infty}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2n+1}\right) = 0$$

La serie converge condicionalmente.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan^{-1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)}{1/n}, \quad \text{L'H} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{2x^2+2x+1}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2+2x+1} = \frac{1}{2} \neq 0, \infty$$

La serie no converge absolutamente.

Respuesta:

a) Converge absolutamente.

b) Converge solo condicionalmente.

3. Serie de Taylor

La serie de Taylor es una herramienta matemática base sumamente importante para ciencias e ingeniería, gracias a ella son posibles las simplificaciones de muchas expresiones complicadas que involucran funciones trascendentes como seno, coseno, la exponencial, etc. y nos permiten trabajar con un polinomio que se "parece"mucho a la función en cuestión. La importancia de tales series amerita una breve nota teórica para ayudar al lector a entender lo que está detrás de tal herramienta.

Supongamos que tenemos una función trascendente como el $\sin(x)$, y queremos saber cuanto vale, $\sin(1{,}2)$, más aún, queremos poder llegar al resultado de manera analítica, es decir, sacando cuentas elementales (en este caso suma, resta, multiplicación y división). La expresión $\sin(1{,}2)$ no es más que un símbolo, letras combinadas que nos hablan de una tal función seno evaluada en 1,2, no nos da la respuesta numérica que queremos. Por otro lado recordemos que un polinomio $P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_0$, al evaluarlo en algún número, podemos llegar mediante operaciones simples a un valor numérico puntual, como por ejemplo $P(x) = x^2 + x \quad \Rightarrow \quad P(2) = 2^2+2 = 6$. Que útil sería tener un polinomio que fuera "igual" a la función seno, y que al evaluarlo en algún punto, como por ejemplo 1,2 llegáramos al resultado que queremos. $\sin(1{,}2) = a_1(1{,}2)^n+a_2(1{,}2)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(1{,}2)+a_0$. La teoría de series de Taylor son el camino para encontrar ese polinomio, polinomio que aproxima a la función.

El hecho es que nos disponemos a encontrar un polinomio, tal polinomio debe constar de coeficientes numéricos $a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots$ y de su parte "variable" $x,\ x^2,\ x^3,\ \cdots$, la forma más genérica de esta parte "variable" la escribiremos de la forma $(x - x_0)^n$, donde el x_0 representa el número en la recta real donde empezamos a construir el polinomio. Mientras más términos de la forma $a_n(x - x_0)^n$ añadimos a nuestro polinomio, mejor será la aproximación.

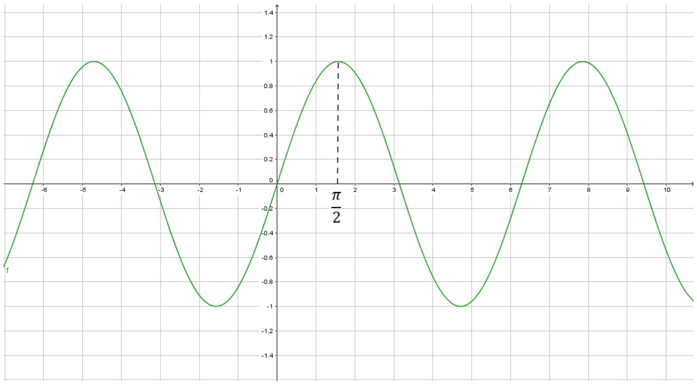
¿ Gráficamente qué es lo que haremos ? Suponiendo que centramos (empezamos a construir) el polinomio en $\pi/2$ al ir agregando términos se va creando un polinomio cada vez más grande y éste se va ajustando cada vez más a la función que se quiere aproximar, gráficamente esto se puede apreciar en la página siguiente. En nuestro ejemplo si se toman infinitos términos para el polinomio entonces este será igual a la función seno para todos los valores de x, no siempre será este es el caso para toda función real, habrá funciones cuyo polinomio de Taylor solo podrá aproximarla en cierto intervalo, sin importar cuantos términos se le agregue. Tal intervalo se denomina intervalo de convergencia de la serie. Representado en forma de serie tenemos la fórmula general del Polinomio de Taylor

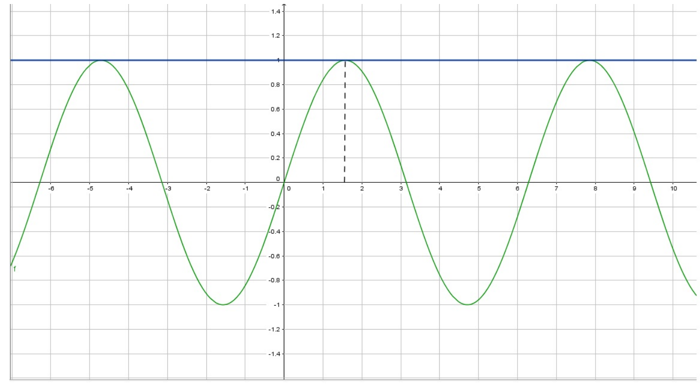
$$f(x) = a_0(x - x_0)^0 + a_1(x - x_0)^1 + a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

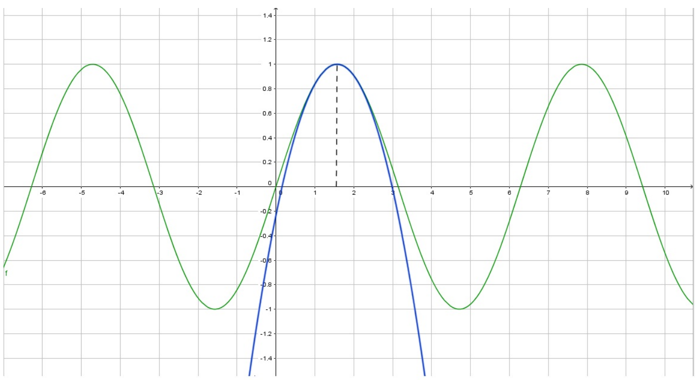
De donde vemos claramente que los coeficientes $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. La expresión $f^{(n)}(x_0)$ representa la derivada general de la función que se quiere aproximar evaluada en el punto donde se centra la serie, se encuentra calculando las sucesivas derivadas de la función y evaluándolas en el punto x_0 hasta que se encuentre un patrón numérico que se pueda representar algebraicamente por una expresión cerrada que dependa solo de n.

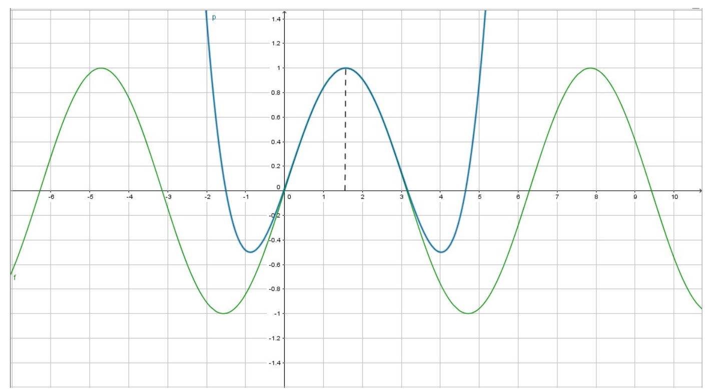
Para fines prácticos como el de nuestro ejercicio no necesitamos infinitos términos de la sumatoria para encontrar cuanto vale $\sin(1{,}2)$, solo algunos bastarán, los infinitos restantes representan un error al valor encontrado, así otra forma de expresar el polinomio es

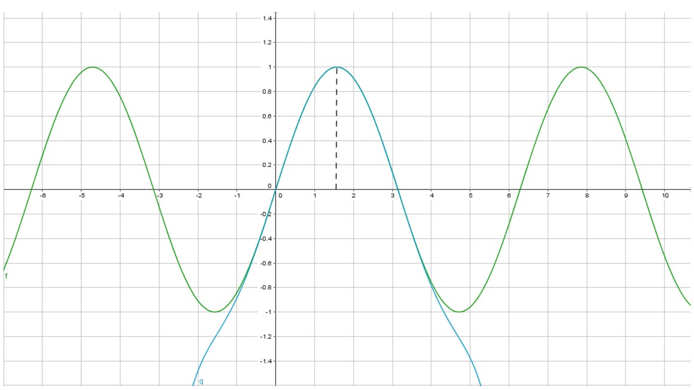
$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(x - x_0)^n + R_{n,x_0}(x)$$

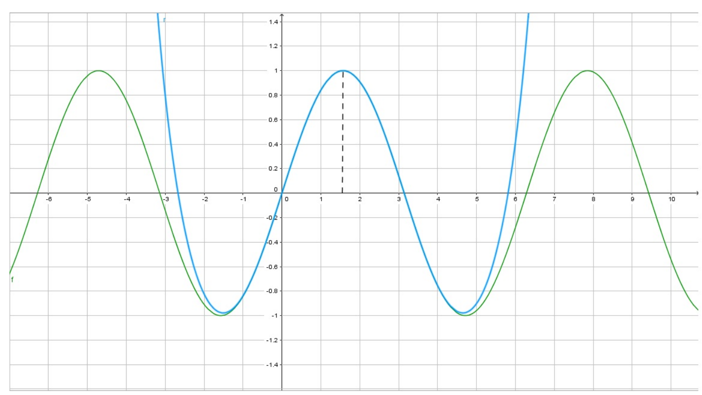

$\frac{\pi}{2}$

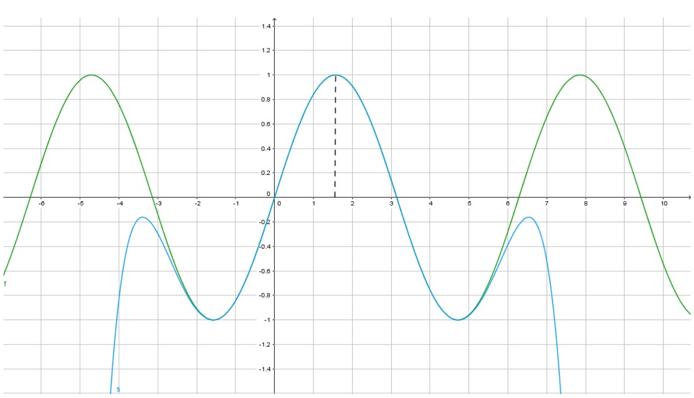


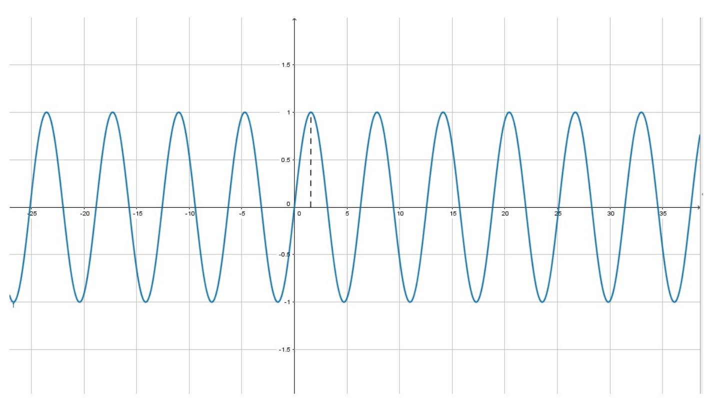












Donde $R_{n,x_0}(x)$ es la fórmula del error para polinomios de Taylor, esta fórmula es diferente para cada función que se desee aproximar, el error depende del valor de N seleccionado para la aproximación, dependiendo de cuanto error se quiera tolerar encontraremos un valor de N, así en principio se nos da un error y a partir de él encontramos cuantos n son necesarios para llegar al resultado. La teoría del error y su fórmula no serán tratadas aquí. Para nuestros fines trabajaremos con la expresión cerrada de a_n y si se desea resolver el problema de sin(1,2) solo tome la cantidad de términos que usted considere necesaria.

La clave para los ejercicios de series de Taylor está en identificar cuál de los métodos conocidos es el indicado para encontrar la serie que aproxima a la función. El primer camino es utilizar la definición y sacar las derivadas una por una hasta encontrar la expresión general para la derivada n-esima y continuar hasta llegar a la serie. El otro camino consiste en utilizar las series ya conocidas que aproximan a las funciones más comunes, tomamos la función dada y la manipulamos algebraicamente hasta dar con una expresión que se ajuste a la serie ya conocida. El primer camino es el que nunca va a fallar, pero toma tiempo y no siempre será sencillo encontrar la expresión de la derivada n-esima, el segundo camino es más rápido y práctico, pero no funcionará para todos los casos, en especial con funciones que difieran mucho de las básicas.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad , \quad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad , \quad |x| < \infty$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad , \quad |x| < \infty$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad , \quad |x| < \infty$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad , \quad |x| < \infty$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{0!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad , \quad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\tan^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Ejercicio 3.1

Hallar la serie de Taylor que aproxima a las siguientes funciones en torno a $x = 0$.

$$\text{a) } f(x) = xe^{-2x} \;\text{ y }\; g(x) = (1+x)e^{-x} \quad , \quad \text{b) } h(x) = \frac{1}{4-x^4} \quad , \quad \text{c) } l(x) = \ln\left(x^2+3x+2\right)$$

a)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad f(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{n+1}}{n!} \quad \text{ó} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n-1} x^n}{(n-1)!}$$

Intervalo de convergencia

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n x^n x}{n!} \frac{(n-1)!}{2^n 2^{-1} x^n} \right| = 2|x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1 \quad \Rightarrow \quad -\infty < x < \infty$$

Pasamos a la siguiente función

$$g(x) = (1+x)e^{-x} = e^{-x} + xe^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!} \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

b)

$$\frac{1}{4-x^4} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{x^4}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4^{n+1}} \quad ; \quad |x| < \sqrt{2}$$

c)

$$l(x) = \ln\left(x^2+3x+2\right) = \ln(x+1) + \ln(x+2) \quad ; \quad \ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad ; \quad -1 < x \leq 1$$

Tomamos $\ln(x)$ y encontramos su serie de Taylor centrada en $x = 2$

$$f^{(0)} = \ln(x)$$

$$f^{(1)} = \frac{1}{x}$$

$$f^{(2)} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f^{(3)} = \frac{2}{x^3}$$

$$f^{(4)} = \frac{-6}{x^4}$$

$$f^{(5)} = \frac{24}{x^5}$$

$$f^{(6)} = \frac{-120}{x^6}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \cdots \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{f^n(2)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n n!} \quad ; \quad \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n} \quad \Rightarrow$$

$$\ln(x) = \ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-2)^n}{2^n n} \quad \Rightarrow \quad \ln(x+2) = \ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{2^n n}$$

Estudiamos la convergencia

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x|}{2} < 1 \quad \Rightarrow \quad -2 < x < 2$$

<u>si $x = 2$</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad ; \quad a_n = \frac{1}{n} \text{es decreiente y} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad ; \quad \text{además} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2) \quad \text{converge}$$

Como la función $\ln(x+2)$ no está definida en $x = -2$, es lógico que la serie que la aproxima ciertamente no converja en ese punto $\quad \Rightarrow \quad -2 < x \leq 2$

$$\ln(x+2) + \ln(x+1) = \ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2^{-2}+1)}{n} x^n \quad ; \quad -1 < x \leq 1$$

Respuesta:

a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{n-1}x^n}{(n-1)!} \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad ; \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!} \quad , \quad -\infty < x < \infty$

b) $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4^{n+1}} \quad ; \quad |x| < \sqrt{2}$

c) $\ln(x+2) + \ln(x+1) = \ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2^{-2}+1)}{n} x^n \quad ; \quad -1 < x \leq 1$

Ejercicio 3.2

Hallar la serie de Taylor de $f(x)$ centrada en $x = 0$ y su región de convergencia.

$$f(x) = \frac{x}{6 + x - x^2}$$

Solución:

$$\frac{x}{6 + x - x^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} \quad \Rightarrow \quad -x = (x-3)A + (x+2)B \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{5}\left[\frac{3}{3-x} - \frac{2}{x+2}\right]$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2\left(1 + \frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \left(\frac{-x}{2}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{3-x} = \frac{1}{3\left(1 - \frac{x}{3}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$$

$$f(x) = \frac{1}{5}\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}\right] = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right) x^n$$

Estudio de la convergencia

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n x 3^n}{3^n 3 x^n}\right| = \frac{|x|}{3}\lim_{n\to\infty} 1 = \frac{|x|}{3} < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| < 3$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2} x^n x 2^n}{2^n 2 (-1)^{n+1} x^n}\right| = \frac{|x|}{2} < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| < 2$$

En los bordes

si $x = 2$

$$\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{3^n} + (-1)^{n+1}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n 2}{3^n 3}\frac{3^n}{2^n} = \frac{2}{3} < 1 \quad \text{converge} \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \quad \text{indefinido} \end{cases} \qquad ; \quad \text{en } x = 2 \text{ diverge}$$

si $x = -2$

Nos toparemos con el término $(-1)^{n+2}$ e igualmente la serie va a diverger.

Respuesta:

$$f(x) = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right) x^n \quad ; \quad |x| < 2$$

Ejercicio 3.3

Hallar la serie de Taylor de $f(x) = \cos(2x)$ en torno a $x = \frac{\pi}{3}$ y calcular su radio de convergencia

Solución:

Centramos la serie en el punto que se nos pide de la siguiente forma

$$\cos(2x) = \cos(2(x - \pi/3 + \pi/3)) = \cos(2(x - \pi/3) + 2\pi/3) = \cos(x' + 2\pi/3)$$

$$\cos(x' + 2\pi/3) = \cos(x')\cos(2\pi/3) - \sin(x')\sin(2\pi/3) \quad ; \quad \cos(2\pi/3) = \frac{-1}{2} \quad ; \quad \sin(2\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(2x) = -\frac{1}{2}\cos(2(x - \pi/3)) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2(x - \pi/3))$$

Teniendo en cuenta las series notables del seno y el coseno

$$\cos(2x) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n (x - \pi/3)^{2n}}{(2n)!} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{n+1}(x - \pi/3)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}(x - \pi/3)^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} 2^{2n}\sqrt{3}(x - \pi/3)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Al desarrollar una serie numérica a partir de las series notables, la serie encontrada obedecerá por lo general al intervalo de convergencia de las series notables utilizadas , en este caso la serie encontrada va a converger para todos los reales, se deja como ejercicio demostrar esto algebraicamente.

Respuesta:

$$\cos(2x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}(x - \pi/3)^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} 2^{2n}\sqrt{3}(x - \pi/3)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad |x| < \infty$$

4. Ecuaciones diferenciales "por cambios de variables"

4.1. Apariencia de ciertas ecuaciones diferenciales a tratar

1.) Variables separables

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(x) \text{ ó } X(x)Y(y)dx + X_1(x)Y_1(x)dy = 0$$

2.) Ecuaciones reducibles a variables separables

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \;\; ; \;\; b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad u = ax + by + c$$

3.) Ecuaciones diferenciales exactas

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \text{ si } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 = du(x,y)$$

la solución de la ecuación es

$$u(x,y) = c \text{ donde } \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \;\; y \;\; \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$$

4.) Ecuaciones diferenciales homogéneas

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{x}{y}\right) \text{ ó } f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = t$$

5.) Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

caso 1:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = u + \alpha \text{ y } y = v + \beta \text{ donde } \begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$$

caso 2:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1x + b_1y = u$$

6.) La ecuación de Bernoulli

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \;\; ; \text{ si } \;\; n \neq 0, 1 \quad \Rightarrow \quad w = y^{1-n}$$

Ejercicio 4.1:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales por variables separables

$$\text{a)}\ \ xy' - y = y^3 \ \ ; \ \ \text{b)}\ \ y'\tan(x) = y \ \ ; \ \ \text{c)}\ \ 3e^x\tan(y)dx + (1-e^x)\sec^2(y)dy = 0 \ \ ;$$

Solución:

a)

$$xy' - y = y^3 \ \ \Rightarrow \ \ y' = \frac{1}{x}(y^3+y) \ \ \Rightarrow \ \ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(y^3+y) \ \ \Rightarrow \ \ \frac{dy}{y^3+y} = \frac{dx}{x} \ \ \Rightarrow \ \ \int \frac{dy}{y^3+y} = \int \frac{dx}{x} \ \ ;$$

$$\frac{1}{y^3+y} = \frac{A}{y} + \frac{By+C}{y^2+1} \ \ \Rightarrow \ \ \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ c = 0 \end{cases} \ \ \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y^3+y} = \int \frac{dx}{x} \ \ \Rightarrow \ \ \int \frac{dy}{y} - \int \frac{ydy}{y^2+1} = \int \frac{dx}{x} \ \ \Rightarrow$$

$$\ln(y) - \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \ln(x) + c \ \ \Rightarrow \ \ x = \frac{cy}{\sqrt{y^2+1}}$$

b)

$$y'\tan(x) = y \ \ \Rightarrow \ \ \frac{dy}{y} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx \ \ \Rightarrow \ \ \ln(y) = \ln(c\sin(x)) \ \ \Rightarrow \ \ y = c\sin(x)$$

c)

$$3e^x\tan(y)dx + (1-e^x)\sec^2(y)dy = 0 \ \ \Rightarrow \ \ \int \frac{3e^x}{e^x-1}dx = \int \frac{\sec^2(y)}{\tan(y)}dy \ \ \Rightarrow$$

$$\ln\left[(e^x-1)^3c_1\right] = \ln\left(\tan(y)c_2\right) \ \ \Rightarrow \ \ \tan(y) = c(e^x-1)^3 \ \ \text{ó} \ \ y = \tan^{-1}(c(e^x-1)^3)$$

Respuesta:

a) $x = \frac{cy}{\sqrt{y^2+1}}$

b) $y = c\sin(x)$

c) $\tan(y) = c(e^x-1)^3$ ó $y = \tan^{-1}(c(e^x-1)^3)$

tarea: $\tan(x)\sin^2(y)dx + \cos^2(x)\cot(y)dy = 0$

Ejercicio 4.2:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales por variables separables

$$\text{a)}\;\; y' = (8x+2y+1)^2 \;\;;\;\; \text{b)}\;\; y' = (x+y)^2 \;\;;\;\; \text{c)}\;\; y' = \sin(x-y) \;\;;\;\; \text{d)}\;\; (x+y)^2 y' = a^2$$

Solución:

a)

$$u = 8x+2y+1 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{du}{dx} = 8 + 2\frac{dy}{x} \;\;\Rightarrow\;\; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{du}{dx} - 4 \;\;\Rightarrow$$

$$y' = (8x+2y+1)^2 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{1}{2}\frac{du}{dx} - 4 = u^2 \;\;\Rightarrow\;\; \int \frac{du}{2(u^2+4)} = \int dx \;\;\Rightarrow\;\; \frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + c = x \;\;\Rightarrow$$

$$8x+2y+1 = 2\tan(4(x+c))$$

b)

$$u = x+y \;\;\Rightarrow\;\; \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{du}{u^2+1} = dx \;\;\Rightarrow\;\; \tan^{-1}(x+y) = x+c$$

c)

$$u = x-y \;\;\Rightarrow\;\; \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{du}{dx} \;\;\Rightarrow\;\; 1-\sin(u) = \frac{du}{dx} \;\;\Rightarrow\;\; dx = \frac{du}{1-\sin(u)} \;\;;$$

$$\int \frac{du}{1-sin(u)} = \int \frac{1+\sin(u)}{1-\sin^2(u)}du = \int \frac{du}{\cos^2(u)} + \int \frac{\sin(u)}{\cos^2(u)} = \tan(u) + \sec(u) \;\;\Rightarrow$$

$$\tan(u) + \sec(u) = x + c \;\;\Rightarrow\;\; \tan(x+y) + \sec(x+y) = x+c$$

d)

$$(x+y)^2 y' = a^2 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{(x+y)^2} \;\;;\;\; \text{sea}\;\; x+y=u \;\;\Rightarrow\;\; \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{(x+y)^2} \;\;\Rightarrow$$

$$\frac{u^2}{u^2+a^2}du = dx \;\;\Rightarrow\;\; \int \frac{u^2}{u^2+a^2}du = \int dx \;\;;\;\; \int \frac{u^2}{u^2+a^2}du = \int \frac{du}{1+\left(\frac{a}{u}\right)} \begin{cases} \frac{a}{u} = t \;\;\rightarrow\;\; u = \frac{a}{t} \\ du = -\frac{adt}{t^2} \end{cases} \;\;\Rightarrow$$

$$-a\int \frac{dt}{t^2(1+t^2)} = -a\left(\int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{t^2+1}\right) = \frac{a}{t} + a\tan^{-1}(t) = u + a\tan^{-1}\left(\frac{a}{u}\right) \;\;\Rightarrow$$

$$x+y+a\tan^{-1}\left(\frac{a}{x+y}\right) = x+c \;\;\Rightarrow\;\; y+c = -\tan^{-1}\left(\frac{a}{x+y}\right) \;\;\Rightarrow\;\; \tan(c-y) = \frac{a}{x+y}$$

Respuesta:

a) $8x + 2y + 1 = 2\tan(4(x + c))$

b) $\tan^{-1}(x + y) = x + c$

c) $\tan(x + y) + \sec(x + y) = x + c$

d) $\tan(c - y) = \frac{a}{x+y}$

tarea: Intente resolver la integral complicada de la parte d) utilizando el cambio de variables $\frac{u}{a} = \tan(\theta)$.

Ejercicio 4.3:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas

$$\text{a)} \quad y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2} \quad ; \quad \text{b)} \quad xy' = \sqrt{y^2 - x^2} \quad ; \quad \text{c)} \quad y' = \frac{-x + 2y - 5}{2x - y + 4}$$

Solución:

a)

$$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2} = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}\frac{1/x^2}{1/x^2} = \frac{2(y/x)}{3 - (y/x)^2} \quad \text{ahora la ecuación es homogénea}$$

$$\text{sea} \quad u = y/x \quad \Rightarrow \quad y = xu \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u \quad \Rightarrow \quad \text{la ecuación queda de la siguiente manera}$$

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{2u}{3 - u^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{u^2 - 3}{u - u^3}du = \frac{dx}{x} \quad ; \quad \frac{u^2 - 3}{u - u^3} = \frac{1}{u - 1} - \frac{3}{u} + \frac{1}{u + 1} \quad ;$$

integrando a ambos lados nos queda

$$\ln(u - 1) - 3\ln(u) + \ln(u + 1) = \ln(cx) \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{u^2 - 1}{u^3}\right) = \ln(cx) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{u^2 - 1}{u^3} = cx \quad \Rightarrow \quad \frac{(y/x)^2 - 1}{(y/x)^3} = cx \quad \Rightarrow \quad c(y^2 - x^2) = y^3$$

b)

$$u = y/x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} + u = \sqrt{u^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1} - u} = \frac{dx}{x} \quad ;$$

$$\frac{1}{\sqrt{u^2 - 1} - u} = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1} - u}\frac{-\sqrt{u^2 - 1} - u}{-\sqrt{u^2 - 1} - u} = -\sqrt{u^2 - 1} - u \quad ;$$

$$(-\sqrt{u^2 - 1} - u)du = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad -\int(\sqrt{u^2 - 1})du - \int u\, du = \int\frac{dx}{x}$$

$$\int\sqrt{u^2 - 1}du \quad \begin{cases} u = \cosh(\theta) \\ du = \sinh(\theta)d\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \int\sqrt{\cosh^2(\theta) - 1}\sinh(\theta)d\theta = \int\sinh^2(\theta)d\theta =$$

$$\frac{1}{2}\cosh(\theta)\sinh(\theta) - \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\cosh(\theta)\sqrt{\cosh^2(\theta) - 1} - \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 - 1} - \frac{1}{2}\cosh^{-1}(u)$$

volviendo a la ecuación

$$-\frac{u}{2}\sqrt{u^2 - 1} + \frac{1}{2}\cosh^{-1}(u) - \frac{u^2}{2} = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad -\frac{y/x}{2}\sqrt{(y/x)^2 - 1} + \frac{1}{2}\cosh^{-1}(y/x) - \frac{(y/x)^2}{2} = \ln(x)$$

c)

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} -\alpha + 2\beta - 5 = 0 \\ 2\alpha - \beta + 4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -1 \;\; ; \;\; \beta = 2$$

$$x = u - 1 \;\; ; \;\; y = v + 2 \quad \Rightarrow \quad dx = du \;\; \text{y} \;\; dy = dv \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{-1(u-1) + 2(v+2) - 5}{2(u-1) - 1(v+2) + 4} = \frac{u - 2v}{v - 2u} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{du} = \frac{u - 2v}{v - 2u} \cdot \frac{1/u}{1/u} = \frac{1 - 2(v/u)}{(v/u) - 2} \;\; \text{la ecuación es homogenea}$$

$$t = \frac{v}{u} \quad \Rightarrow \quad v = ut \quad \Rightarrow \} \frac{dv}{du} = t + u\frac{dt}{du} \quad \Rightarrow \quad t + u\frac{dt}{du} = \frac{1 - 2t}{t - 2} \quad \Rightarrow \quad u\frac{dt}{du} = \frac{1 - 2t}{t - 2} - t \quad \Rightarrow \quad \frac{t - 2}{1 - t^2}dt = \frac{du}{u} \quad ;$$

$$\frac{t - 2}{1 - t^2} = \frac{1}{2(t - 1)} - \frac{3}{2(t + 1)} \;\; \text{entonces integrando a ambos lados}$$

$$\ln(\sqrt{t - 1}) - \ln(\sqrt{(t + 1)^3}) = \ln(cu) \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{\sqrt{t - 1}}{\sqrt{(t + 1)^3}}\right) = \ln(cu) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{t - 1}}{\sqrt{(t + 1)^3}} = cu \quad \Rightarrow$$

$$\frac{t - 1}{(t + 1)^3} = cu^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{v/u - 1}{(v/u + 1)^3} = cu^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{y-2}{x+1} - 1}{\frac{y-2}{x+1} + 1} = c(x + 1)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{-(x + 1)^2(x - y + 3)}{(x + y - 1)^3} = c(x + 1)^2 \quad \Rightarrow$$

$$(y - x - 3) = c(x + y - 1)^3$$

Respuesta:

a) $c(y^2 - x^2) = y^3$

b) $-\frac{y/x}{2}\sqrt{(y/x)^2 - 1} + \frac{1}{2}\cosh^{-1}(y/x) - \frac{(y/x)^2}{2} = \ln(x)$

c) $(y - x - 3) = c(x + y - 1)^3$

Ejercicio 4.4:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales tipo Bernoulli (no lineales)

$$\text{a)}\quad y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y} \quad ; \quad \text{b)}\quad 3xdy = y\left(1 + x\sin(x) - 3y^3\sin(x)\right)dx \quad ;$$

$$\text{c)}\quad y' + y\frac{x+1/2}{x^2+x+1} = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^{3/2}}y^2$$

Solución:

a)

$$y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{4}{x}y = xy^{1/2} \quad ; \quad \begin{cases} w = y^{1-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad w = y^{1/2} \\ \frac{dw}{dx} = \frac{1}{2}y^{-1/2}\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad y^{-1/2}y' = 2w' \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$y^{-1/2}y' - \frac{4}{x}y^{-1/2} = x \quad \Rightarrow \quad w' - \frac{2}{x}w = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad (u(x)w)' = u(x)\frac{x}{2} \quad ; \quad u(x) = x^{-2} \quad \Rightarrow$$

$$(x^{-2}w)' = \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2x} \quad \Rightarrow \quad x^{-2}w = \frac{1}{2}\ln|x| + c \quad \Rightarrow \quad w = x^2\left(\frac{1}{2}\ln|x| + c\right) \quad \Rightarrow \quad y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + c\right)$$

b)

$$3xdy = y\left(1 + x\sin(x) - 3y^3\sin(x)\right)dx \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \sin(x)\right)y = -\frac{\sin(x)}{x}y^4 \quad ; \quad w = y^{1-4} = y^{-3} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{-1}{3}\frac{dw}{dx} = y^{-4}\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3}w' = y^{-4}y' \quad \Rightarrow \quad y^{-4}y' - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \sin(x)\right)y^{-3} = -\frac{\sin(x)}{x} \quad \Rightarrow$$

$$w' + \left(\frac{1}{x} + \sin(x)\right)w = 3\frac{\sin(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad (wu(x))' = 3u(x)\frac{\sin(x)}{x} \quad ; \quad u(x) = xe^{-\cos(x)} \quad \Rightarrow$$

$$wxe^{-\cos(x)} = 3\int \sin(x)e^{-\cos(x)}dx \quad \Rightarrow \quad wxe^{-\cos(x)} = 3e^{-\cos(x)} + c \quad \Rightarrow \quad w = \frac{3}{x} + \frac{ce^{\cos(x)}}{x} \quad \Rightarrow$$

$$y = \frac{x^{1/3}}{\left(3 + ce^{\cos(x)}\right)^{1/3}}$$

c)

$$y' + y\frac{x+1/2}{x^2+x+1} = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^{3/2}}y^2 \quad \Rightarrow \quad y^{-2}y' + y^{-1}\frac{x+1/2}{x^2+x+1} = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^{3/2}} \quad \begin{cases} w = y^{-1} \\ -w' = y^{-2}y' \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$w' + \frac{x+1/2}{x^2+x+1}w = \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad (wu(x))' = u(x)\frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^{3/2}} \quad ; \quad u(x) = (x^2+x+1)^{-1/2} \quad \Rightarrow$$

$$\left(w(x^2+x+1)^{-1/2}\right)' = \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2} \quad ; \quad \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{x^2+x+1} - \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2} \quad ;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2(x+1/2)}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+1/2)\right) \quad \text{y}$$

$$\int \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+1/2)\right) + \frac{x}{x^2+x+1} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \quad ;$$

$$w(x^2+x+1)^{-1/2} = c - \frac{x}{x^2+x1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} = c\sqrt{x^2+x+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

Respuesta:

a) $y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + c\right)$

b) $y = \frac{x^{1/3}}{\left(3+ce^{\cos(x)}\right)^{1/3}}$

c) $\frac{1}{y} = c\sqrt{x^2+x+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$

Ejercicio 4.5:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales donde no aparece y de forma explícita

$$\text{a)}\ \ xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right) \quad ; \quad \text{b)}\ \ xy''' + y'' = 1 + x \quad ; \quad \text{c)}\ \ (y''')^2 + (y'')^2 = 1$$

Solución:

a)

$$y' = v(x) \quad \Rightarrow \quad y'' = v'$$

$$xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad xv' = v \ln\left(\frac{v}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{v}{x} \ln\left(\frac{v}{x}\right) \quad ; \quad \text{ecuación diferencial homogénea} \ ;$$

$$\frac{v}{x} = t \quad \Rightarrow \quad v = xt \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = t + x\frac{dt}{dx} \quad \Rightarrow$$

$$v' = \frac{v}{x} \ln\left(\frac{v}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = \frac{t\ln(t) - t}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dt}{t\left(\ln(t) - 1\right)} = \int \frac{dx}{x} \quad ;$$

$$\int \frac{dt}{t\left(\ln(t) - 1\right)} \quad \begin{cases} \ln(t) - 1 = u \\ \frac{1}{t}dt = du \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|\ln|t| - 1| \quad ;$$

$$\int \frac{dt}{t\left(\ln(t) - 1\right)} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|\ln|t| - 1| = \ln|c_1 x| \quad \Rightarrow \quad t = e^{c_1 x + 1} \quad \Rightarrow \quad v = xe^{c_1 x + 1} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = xe^{c_1 x + 1} \quad \Rightarrow \quad y = \left(c_1' x - (c_1')^2\right) e^{\frac{x}{c_1} + 1} + c_2$$

b)

$$y' = v \quad ; \quad y'' = v' \quad ; \quad y''' = v''$$

$$xy''' + y'' = 1 + x \quad \Rightarrow \quad xv'' + v' = 1 + x \quad ;$$

Como v es función solo de la variable independiente podemos reducir el orden de la ecuación con un simple cambio de variable

$$v' = u \quad ; \quad v'' = u' \quad ; \quad u = u(x)$$

$$xv'' + v' = 1 + x \quad \Rightarrow \quad u' + \frac{u}{x} = \frac{1 + x}{x} \quad ; \quad \text{Bernoulli lineal}$$

$$(ut(x))' = t(x)\frac{1 + x}{x} \quad \Rightarrow \quad t(x) = x \quad \Rightarrow \quad u = \frac{x}{2} + \frac{c_1}{x} + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{x}{2} + \frac{c_1}{x} + 1 \quad \Rightarrow$$

$$v = \frac{x^2}{4} + c_1 \ln|x| + x + c_2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + c_1 x \ln|x| + c_2 x + c_3$$

c)

$$y' = v \quad ; \quad y'' = v' \quad ; \quad y''' = v'' \quad \Rightarrow \quad (y''')^2 + (y'')^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (v'')^2 + (v')^2 = 1$$

$$v' = u \quad ; \quad v'' = u' \quad \Rightarrow \quad (v'')^2 + (v')^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (u')^2 + u^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad u' = \pm\sqrt{1-u^2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} = \pm\sqrt{1-u^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pm dx \quad \Rightarrow \quad \sin^{-1}(u) = \pm x + c_1 \quad \Rightarrow \quad u = \sin(\pm x + c_1) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dx} = \sin(\pm x + c_1) \quad \Rightarrow \quad v = \pm\cos(\pm x + c_1) + c_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \pm\cos(\pm x + c_1) + c_2 \quad \Rightarrow$$

$$y = \pm\sin(\pm x + c1) + c_2 x + c_3$$

Respuesta:

a) $y = \left(c_1' x - (c_1')^2\right) e^{\frac{x}{c_1}+1} + c_2$

b) $y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + c_1 x \ln|x| + c_2 x + c_3$

c) $y = \pm\sin(\pm x + c1) + c_2 x + c_3$

Ejercicio 4.6:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales donde no aparece x de forma explícita

$$\text{a) } yy'' = y^2y' + (y')^2 \quad ; \quad \text{b) } yy'' - (y')^3 = 0\text{c) } y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$$

Solución:

a)

$$v(y(x)) \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = v \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = v\frac{dv}{dy}$$

$$yvv' = y^2v + v^2 \quad \Rightarrow \quad v' - \frac{1}{y}v = y \;\; \text{Bernoulli} \quad \Rightarrow \quad (u(y)v)' = yu(y) \quad ; \quad u(y) = e^{\int \frac{-1}{y}dy} \quad \Rightarrow \quad u(y) = \frac{1}{y}$$

$$(1/y\ v)' = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{y} = y + c_1 \quad \Rightarrow \quad v = y^2 + c_1y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y^2 + c1y \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{c_1y} - \frac{1}{c_1}\int \frac{dy}{c_1 + y} = \int dx \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{c_1}\ln\left|\frac{y}{c_1 + y}\right| + c_2$$

b)

$$y' = v \quad ; \quad y'' = vv' \;\; \text{la derivada de } v \text{ es respecto a } y$$

$$yvv' - v^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{v^2}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dy} = \frac{v^2}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v^2} = \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{v} = \ln|c_1y| \quad \Rightarrow \quad v = \frac{-1}{\ln|c_1y|} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\ln|c_1y|} \quad \Rightarrow \quad \int \ln|c_1y|dy = \int -dx \quad \Rightarrow \quad x = y(1 - \ln|c_1y|) + c_2$$

c)

Suerte

Respuesta:

a) $x = \frac{1}{c_1}\ln\left|\frac{y}{c_1+y}\right| + c_2$

b) $x = y(1 - \ln|c_1y|) + c_2$

c) ¿?

5. Trayectorias ortogonales

Ejercicio 5.1

Encontrar la familia de trayectorias ortogonales de las siguientes familias de curvas

$$\text{a) } xy = c \;\; ; \;\; \text{b) } (x-c)^2 + y^2 = c^2 \;\; ; \;\; \text{c) } x^2 - xy + y^2 = c^2 \;\; ; \;\; \text{d) } 2cy + x^2 = c^2 \;\; ; \;\; c > 0$$

Respuesta:

a)

$$xy = c \quad \Rightarrow \quad y = \frac{c}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-c}{x^2} \;\; ; \;\; \text{como } c = xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \;\; ; \;\; m_{ort} = \frac{-1}{m_{curv}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow$$

$$ydy = xdx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \quad \Rightarrow \quad y^2 - x^2 = c$$

b)

$$(x-c)^2 + y^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad 2(x-c) + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{c-x}{y} \;\; ; \;\; c = \frac{x^2+y^2}{2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2+y^2}{2x} - x}{y} \quad \Rightarrow$$

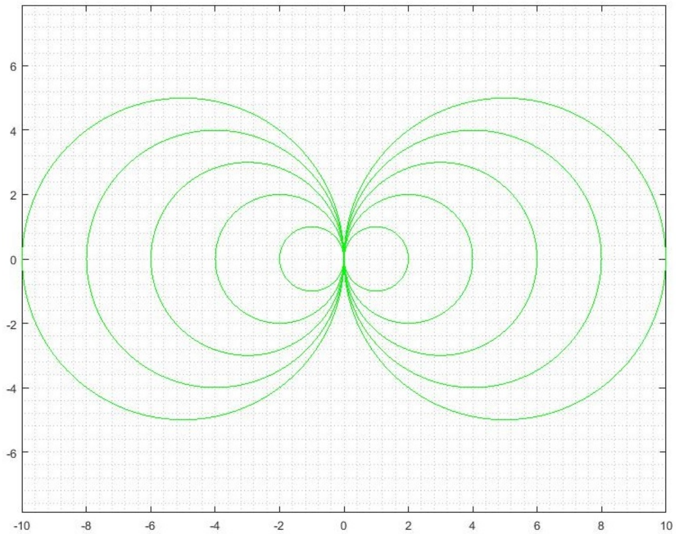
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \;\; ; \;\; m_{ort} = \frac{-1}{m_{curv}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}\frac{1/x^2}{1/x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2(y/x)}{1 - (y/x)^2} \;\; ;$$

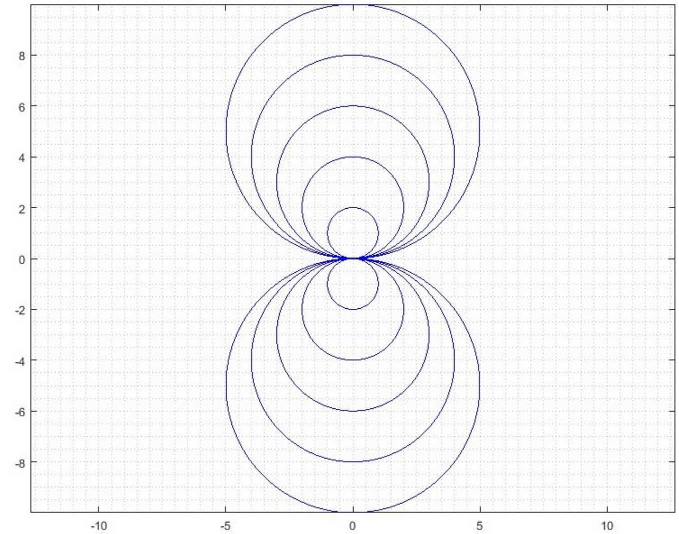
$$\frac{y}{x} = u \quad \Rightarrow \quad y = ux \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u \quad \Rightarrow \quad xu' + u = \frac{2u}{1-u^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u}\frac{1-u^2}{1+u^2}du = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

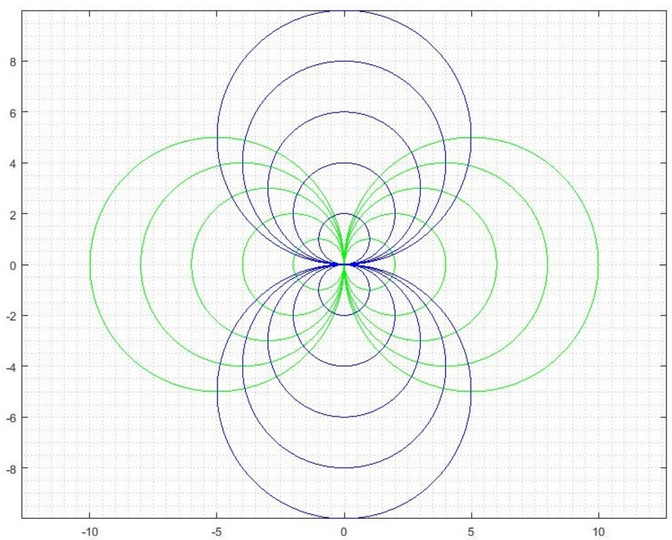
$$\left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{u^2+1}\right) du = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln(u) - \ln(u^2+1) = \ln(cx) \quad \Rightarrow \quad \frac{xy}{x^2+y^2} = xc \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - \frac{y}{c} = 0 \quad \Rightarrow$$

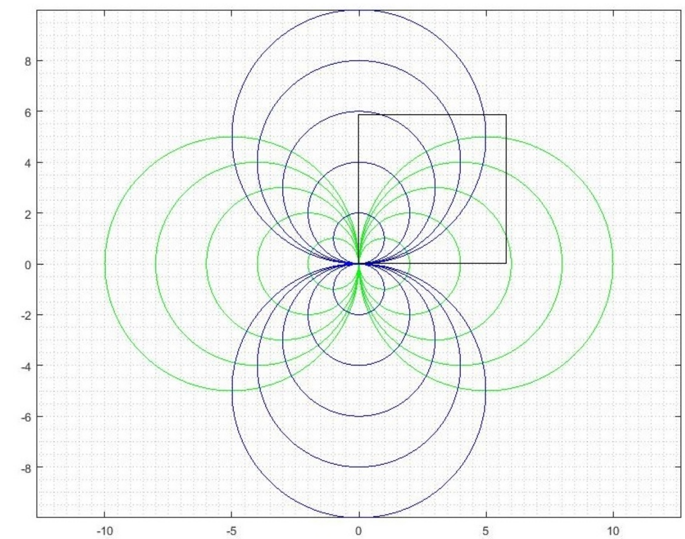
$$x^2 + \left(y^2 - 2y\frac{1}{2c} + \frac{1}{(2c)^2}\right) = \frac{1}{(2c)^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 + (y - 1/2c)^2 = (1/2c)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + (y-c)^2 = c^2$$

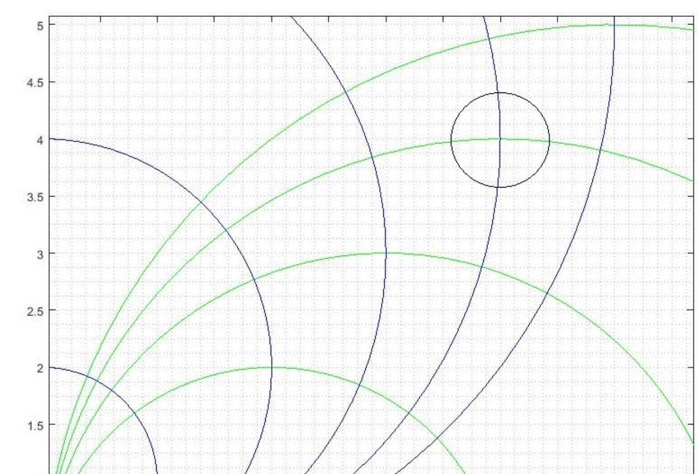
En la siguiente página se presentan 5 imágenes de izquierda a derecha donde se puede apreciar gráficamente lo que estamos haciendo para este ejercicio, tal desarrollo es análogo para los demás. La imagen 1 es la gráfica de la familia de curvas $(x-c)^2 + y^2 = c^2$ la imagen 2 es el resultado de nuestro ejercicio $x^2 + (y-c)^2 = c^2$. Llamamos familia de curvas ortogonales a la imagen 2, en efecto si superponemos las dos primeras imágenes tenemos la imagen 3, que con ayuda de las imágenes 4 y 5 nos revela que cada vez que una curva de la familia ortogonal corta una curva de la familia original lo hace en un ángulo recto de $\pi/2$.


6 4 2 0 -2 -4 -6
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10


8 6 4 2 0 -2 -4 -6 -8
-10 -5 0 5 10


8 6 4 2 0 -2 -4 -6 -8
-10 -5 0 5 10


8 6 4 2 0 -2 -4 -6 -8
-10 -5 0 5 10


5 4.5 4 3.5 3 2.5 2 1.5 1
0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5 5.5

c)

$$x^2 - xy + y^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad 2x - (y + xy') + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad (2x - y) + (2y - x)y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y - 2x}{2y - x} \quad \Rightarrow$$

$$y'_{ort} = \frac{x - 2y}{y - 2x} = \frac{1 - 2(y/x)}{(y/x) - 2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = u \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u \quad \Rightarrow \quad \frac{u - 2}{1 - u^2}du = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{u - 1}{(u + 1)^3} = cx^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x^2(y - x)}{(x + y)^3} = cx^2 \quad \Rightarrow \quad (y - x) = c(x + y)^3$$

d)

$$2cy + x^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad 2cy' + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{c} \quad ; \quad c^2 + (-2y)c - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = y + \sqrt{y^2 + x^2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y + \sqrt{y^2 + x^2}} \quad \Rightarrow \quad y'_{ort} = \frac{y + \sqrt{y^2 + x^2}}{x} \cdot \frac{1/x}{1/x} \quad \Rightarrow \quad y'_{ort} = (y/x) + \sqrt{1 + (y/x)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = u \quad \cdots \quad \Rightarrow$$

$$\ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) = \ln(cx) \quad \Rightarrow \quad u + \sqrt{u^2 + 1} = cx \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y^2 + 1} = cx^2 - y$$

Respuesta:

a) $y^2 - x^2 = c$

b) $x^2 + (y - c)^2 = c^2$

c) $(y - x) = c(x + y)^3$

d) $\sqrt{y^2 + 1} = cx^2 - y$

6. Ecuaciones diferenciales de n-ésimo orden

Ejercicio 6.1:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando su el polinomio característico

$$\text{a)}\;\; y^{(4)} + 2y'' + y = 0 \;\;;\;\; \text{b)}\;\; y^{(5)} - 2y^{(4)} + 17y^{(3)} = 0 \;\;;\;\; \text{c)}\;\; y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

Solución:

a)

$$k^4 + 2k^2 + 1 = 0 \;\;;\; \text{sea}\;\; k^2 = t \;\;\Rightarrow\;\; k^4 = t^2 \;\;\Rightarrow\;\; t^2 + 2t + 1 = \;\;\Rightarrow\;\; t = \begin{matrix} -1+0 \\ -1-0 \end{matrix} \;\;\Rightarrow\;\; \begin{matrix} k^2 = -1 \\ k^2 = -1 \end{matrix} \;\;\Rightarrow$$

$$k^4 + 2k^2 + 1 = (k \pm i)^2 = (k+i)^2(k-i)^2$$

Recordar que el orden de la ecuación corresponde al número de soluciones linealmente independientes que deberán aparecer, en este caso deberán ser cuatro.

$$y_1 = e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \;\;;\;\; y_2 = e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

En efecto y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial pero no son linealmente independientes, a partir de ellas encontraremos las funciones que sí son LI, valiendonos de sus diferentes combinaciones lineales.

$$y_1 + y_2 = 2\cos(x) \;\;;\;\; y_1 - y_2 = i2\sin(x) \;\;\Rightarrow\;\; u(x) = \cos(x) \;\;;\;\; v(x) = \sin(x) \;\; \text{así} \;\; y_1 = \cos(x) \;\; \text{y} \;\; y_2 = \sin(x)$$

Se sigue que $y_3 = x\cos(x)$ y $y_4 = x\sin(x)$. Por último si y_1, y_2, y_3 y y_4 son soluciones de la ecuación diferencial, cualquier combinación lineal de ellas también es solución, y es esta última la solución más general que se puede reportar.

$$y = c_1'\cos(x) + c_2'\sin(x) + c_3'x\cos(x) + c_4'x\sin(x) = (c_1x + c_2)\cos(x) + (c_3x + c_4)\sin(x)$$

b)

$$k^5 - 2k^4 + 17k^3 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; k^3(k^2 - 2k + 17) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; k^3[(k - (1+i4))(k - (1-i4))] = 0$$

$$y_1 = e^0 = 1 \;\;;\;\; y_2 = xe^0 = x \;\;;\;\; y_3 = x^2e^0 = x^2 \;\;;\;\; y_4 = e^{(1+i4)x} \qquad y_5 = e^{(1-i4)x}$$

En cuanto a las dos últimas soluciones, teniendo en cuenta lo aprendido en el ejercicio anterior

$$y_4 = \text{Re}\{e^{(1+i4)x}\} = e^x\cos(4x) \;\;;\;\; y_5 = \text{Im}\{e^{(1+i4)x}\} = e^x\sin(4x)$$

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^x\cos(4x) + c_5e^x\sin(4x)$$

c)

$$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0 \;\;;\;\; \text{por ruffini} \;\; (k-1)^3 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; y_1 = e^{1\cdot x} \;\; \text{faltan dos soluciones}$$

Como $y_1 = ce^x$ es solución, pero y_2 no puede ser múltiplo de y_1, entonces pienso y_2 como $y_2 = v(x)e^x$, nuestro objetivo ahora es encontrar esa $v(x)$, si decimos que esta y_2 es solución, entonces debe satisfacer la ecuación diferencial

$$y_2 = ve^x$$

$$y_2' = e^x(v' + v)$$

$$y_2'' = e^x(v'' + 2v' + v)$$

$$y_2''' = e^x(v''' + 3v'' + 3v' + v)$$

sustituyendo en la ecuación

$$e^x[(v''' + 3v'' + 3v' + v) + (-3v'' - 6v' - 3v) + (3v' + 3v) - v] = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x v''' = 0 \quad \Rightarrow \quad v''' = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\text{las } v \text{ que cumplen esto son} \quad \begin{array}{c} v_1(x) = c_1 x + c_2 \\ v_2(x) = c_3 x^2 + c_4 x + c_5 \end{array}$$

Así tenemos las soluciones que faltan

$$y_2 = (c_1 x + c_2)e^x \quad ; \quad y_3 = (c_3 x^2 + c_4 x + c_5)e^x$$

Tomando la combinación lineal de las tres soluciones encontradas y simplificando

$$y = a_1 e^x + a_2 x e^x + a_3 x^2 e^x$$

Resulta entonces que las soluciones finales son $y_1 = e^x \quad ; \quad y_2 = xe^x \quad ; \quad y_3 = x^2 e^x$, solo para estar seguros verificamos que sean linealmente independientes

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = 2e^{3x} \neq 0$$

Las soluciones son LI.

Respuesta:

a) $y = c_1' \cos(x) + c_2' \sin(x) + c_3' x \cos(x) + c_4' x \sin(x) = (c_1 x + c_2)\cos(x) + (c_3 x + c_4)\sin(x)$

b) $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^x \cos(4x) + c_5 e^x \sin(4x)$

c) $y = a_1 e^x + a_2 x e^x + a_3 x^2 e^x$

tarea: $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 14y^{(2)} - 20y^{(1)} + 25y^{(0)} = 0$

Ejercicio 6.2:

Encontrar la expresión genérica de la solución particular para las siguientes ecuaciones diferenciales no homogéneas

$$\text{a)}\ \ y'' - 5y + 6y = (x^2+1)e^x + xe^x \quad ; \quad \text{b)}\ \ y'' - 2y' + 5y = xe^x\cos(2x) - x^2e^x\sin(2x) \quad ;$$

$$\text{c)}\ \ y'' + 4y = x^2e^{-3x}\sin(x) - x\sin(2x)$$

Solución:

a)

$$y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$$

$$\text{I}\ \ y'' - 5y' + 6y = (x^2+1)e^x \quad \Rightarrow \quad y_{p_I} = (Ax^2+Bx+C)e^x$$

$$\text{II}\ \ y'' - 5y' + 6y = x^{2x} \quad \Rightarrow \quad y_{p_I I} = (Dx+E)e^{2x} = Dxe^{2x} + \boxed{Ee^{2x}} \quad \Rightarrow \quad y_{p_I I} = (Dx^2+Ex)e^{2x}$$

$$y_p = (Ax^2+Bx+c)e^x + (Dx^x+Ex)e^{2x}$$

b)

$$y_h = c_1e^x\cos(2x) + c_2e^x\sin(2x)$$

$$\text{I}\ \ y'' - 2y' + 5y = xe^x\cos(2x) \quad \Rightarrow \quad y_{p_I} = (Ax+B)e^x\cos(2x) + (Cx+D)e^x\sin(2x)$$

$$\text{ver}\ \ \boxed{Be^x\cos(2x)}\ \ \text{y}\ \ \boxed{De^x\sin(2x)}$$

$$\text{II}\ \ y'' - 2y' + 5y = -x^2e^x\sin(2x) \quad \Rightarrow \quad y_{p_{II}} = (Ex^2+Fx+H)e^x\cos(2x) + (Ix^2+Jx+K)e^x\sin(2x)$$

$$\text{ver}\ \ \boxed{He^x\cos(2x)}\ \ \text{y}\ \ \boxed{Ke^x\sin(2x)}$$

$$y_p = xe^x[(Ax^2+Bx+C)\cos(2x) + (Dx^2+Ex+F)\sin(2x)]$$

c)

$$y_h = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)$$

$$\text{I} \;\; y'' + 4y = x^2e^{-3x}\sin(x) \quad \Rightarrow \quad y_{p_I} = (Ax^2+Bx+C)e^{-3x}\cos(x) + (Dx^2+Ex+F)e^{-3x}\sin(x)$$

$$\text{II} \;\; y'' + 4y = -x\sin(2x) \quad \Rightarrow \quad y_{p_II} = (Gx+H)\cos(2x) + (Ix+J)\sin(2x)$$

$$\boxed{J\sin(2x)} \;\text{ y }\; \boxed{H\cos(2x)}$$

$$y_{p_II} = (Gx^2+Hx)\cos(2x) + (Ix^2+Jx)\sin(2x)$$

$$y_p = (Ax^2+Bx+C)e^{-3x}\cos(x) + (Dx^2+Ex+F)e^{-3x}\sin(x) + (Gx^2+Hx)\cos(2x) + (Ix^2+Jx)\sin(2x)$$

Respuesta:

a) $y_p = (Ax^2+Bx+c)e^x + (Dx^x+Ex)e^{2x}$

b) $y_p = xe^x[(Ax^2+Bx+C)\cos(2x) + (Dx^2+Ex+F)\sin(2x)]$

c) $y_p = (Ax^2+Bx+C)e^{-3x}\cos(x) + (Dx^2+Ex+F)e^{-3x}\sin(x) + (Gx^2+Hx)\cos(2x) + (Ix^2+Jx)\sin(2x)$

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{d}{c}\right|_A^B$$

Ejercicio 6.3:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales no homogéneas con coeficientes constantes por el método de coeficientes indeterminados

$$\text{a)} \;\; y'' - 2y' + y = \sin(x) + \sinh(x) \;\; ; \;\; \text{b)} \;\; y'' + y' = \sin^2(x)$$

Solución:

a)

$$\text{Saber que } \; y_h = (c_1 + c_2 x)e^x \;\; ; \;\; y'' - 2y' + y = \sin(x) + \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$$

$$I \;\; y'' - 2y' + y = \sin(x) \quad ; \quad II \;\; y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{2} \quad ; \quad III \;\; y'' - 2y' + y = -\frac{e^- x}{2}$$

$$I$$

$$y_{p_I} = A\cos(x) + B\sin(x) \;\; ; \;\; y'_{p_I} = B\cos(x) - A\sin(x) \;\; ; \;\; y''_{p_I} = -B\sin(x) - A\cos(x)$$

tomando estos valores y sustituyendo en la ecuación diferencial

$$2A\sin(x) - 2B\cos(x) = \sin(x) \;\; \Rightarrow \;\; \begin{matrix} 2A = 1 \\ -2B = 0 \end{matrix} \;\; \Rightarrow \;\; \begin{matrix} A = 1/2 \\ B = 0 \end{matrix} \;\; \Rightarrow \;\; \boxed{y_{p_I} = \frac{1}{2}\cos(x)}$$

$$II$$

mirar las soluciones que ya tiene la y_h antes de seleccionar estas, no pueden rpetirse

$$y_{p_{II}} = Ae^x \;\; \Rightarrow \;\; y_{p_{II}} = Axe^x \;\; \Rightarrow \;\; y_{p_{II}} = Ax^2e^x \;\; \Rightarrow \;\; y'_{p_{II}} = Axe^x(x+2) \;\; ; \;\; y''_{p_{II}} = Ae^x(x^2+4x+2)$$

$$2Ae^x = \frac{1}{2}e^x \;\; \Rightarrow \;\; A = 1/4 \;\; \Rightarrow \;\; \boxed{y_{p_{II}} = \frac{x^2}{4}e^x}$$

$$III$$

$$y_{p_{III}} = Be^x \;\; ; \;\; y'_{p_{III}} = -Be^x \;\; ; \;\; y''_{p_{III}} = Be^x$$

$$4Be^{-x} = -\frac{1}{2}e^{-x} \;\; \Rightarrow \;\; B = -1/8 \;\; \Rightarrow \;\; \boxed{y_{p_{III}} = -\frac{1}{8}e^{-x}}$$

$$y_p = \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{x^2}{4}e^x - \frac{1}{8}e^{-x} \;\; \Rightarrow \;\; y = (c_1 + c_2x)e^x + \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{x^2}{4}e^x - \frac{1}{8}e^{-x}$$

b)

$$\text{Saber que}\quad y_h = c_1 + c_2e^{-x} \quad ; \quad y'' + y' = \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$I \quad y'' + y' = \frac{1}{2} \quad ; \quad II \quad y'' + y' = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$y_{p_I} = A \quad \Rightarrow \quad y_{p_I} = Ax \quad \Rightarrow \quad y'_{p_I} = A \quad ; \quad y''_{p_I} = 0$$

$$0 + A = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad A = 1/2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_{p_I} = \frac{x}{2}}$$

$$y_{p_{II}} = A\cos(2x) + B\sin(2x) \quad \Rightarrow \quad y'_{p_{II}} = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) \quad \Rightarrow \quad y''_{p_{II}} = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$$

$$(2B - 4A)\cos(2x) + (-2A - 4B)\sin(2x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/10 \\ -1/20 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_{p_{II}} = \frac{1}{10}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x)}$$

$$y_p = \frac{x}{2} + \frac{1}{10}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x) \quad \Rightarrow \quad y = c_1 + c_2e^{-x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{10}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x)$$

Respuesta:

a) $y = (c_1 + c_2x)e^x + \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{x^2}{4}e^x - \frac{1}{8}e^{-x}$

b) $y = c_1 + c_2e^{-x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{10}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x)$

Ejercicio 6.4:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales no homogéneas de coeficientes constantes por el método de variación de parámetros

$$\text{a)}\ \ y'' + 4y = 3\csc(x)\ \ ;\ \ \text{b)}\ \ y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

Solución:

a)

$$\text{Saber que}\ \ y_h = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)\ \ ;\ \ y'' + 4y = \frac{3}{\sin(x)}$$

$$\text{Sea}\ \ y_p = u_1(x)\cos(2x) + u_2(x)\sin(2x)\ \ \Rightarrow\ \ y_p' = u_1'\cos(2x) - 2u_1\sin(2x) + u_2'\sin(2x) + 2u_2\cos(2x)\ \ ;$$

$$y_p' = \underbrace{2u_2\cos(2x) - 2u_1\sin(2x)}_{\text{La tomamos como la verdadera } y_p'} + \underbrace{u_1'\cos(2x) + u_2'\sin(2x)}_{\text{Asumimos que vale cero}}$$

$$\boxed{u_1'\cos(2x) + u_2'\sin(2x) = 0}\ \ I$$

$$y_p' = 2u_2\cos(2x) - 2u_1\sin(2x)\ \ \Rightarrow\ \ y_p'' = -4u_1\cos(2x) - 4u_2\sin(2x) - 2u_1'\sin(2x) + 2u_2'\cos(2x)$$

Sustituimos y_p y y_p'' en la ecuación diferencial original no homogénea y recordando que:

$$u_1'\cos(2x) + u_2'\sin(2x) = 0\ \ \text{tenemos}$$

$$\boxed{-2u_1'\sin(2x) + 2u_2'\cos(2x) = 3\csc}\ \ II$$

$$\text{Despejamos } u_1' \text{ y } u_2' \text{ de } I \text{ y } II\ \ \Rightarrow\ \ \begin{aligned} u_1' &= -\tfrac{3}{2}\csc(x)\sin(2x) = -3\cos(x) \\ u_2' &= \tfrac{3}{2}\csc(x) - 3\sin(x) \end{aligned}\ \ ;\ \ \text{integramos para encontrar } u_1 \text{ y } u_2$$

$$u_1 = -3\int\cos(x)dx = -3\sin(x) + c_3$$

$$u_2 = \frac{3}{2}\int\csc dx - 3\int\sin(x) = \frac{3}{2}\ln|\csc(x) - \cot(x)| + 3\cos(x) + c_4$$

$$y_p = (-3\sin(x) + c_3)\cos(2x) + \left(\frac{3}{2}\ln|\csc(x) - \cot(x)| + 3\cos(x) + c_4\right)\sin(2x)$$

$$y = y_h + y_p$$

b)

$$\text{Saber que} \;\; y_h = (c_1 + c_2 x)e^x$$

$$y_p = u_1 e^x + u_2 x e^x \quad \Rightarrow \quad y_p' = u_1 e^x + u_2 e^x + x u_2 e^x + u_1' e^x + u_2' x e^x \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} y_p' = u_1 e^x + u_2 e^x \\ \\ \boxed{u_1' e^x + u_2' x e^x = 0} \;\; I \end{array}$$

$$y_P'' = u_1' e^x + u_1 e^x + u_2' e^x + 2u_2 e^x + x u_2' e^x + x u_2 e^x$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial original no homogenea, y recordando que $u_1' e^x + u_2' x e^x = 0$ tenemos

$$\boxed{u1'(x) e^x + u_2'(1+x)e^x = \frac{e^x}{x}} \;\; II$$

$$\begin{bmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & (1+x)e^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^x/x \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} u_1 = -x + c_4 \\ \\ u_2 = \ln|x| + c_3 \end{array}$$

$$y_p = -x e^x + c_4 e^x + x c_3 e^x + x \ln|x| e^x$$

Considerando los términos de la solución encontrada que no se repiten en la solución homogénea

$$y_p = x \ln|x| e^x \quad \Rightarrow \quad y = y_h + y_p$$

Respuesta:

a) $y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + 3\sin^3(x) + 3\sin(x)\cos^2(x) + \frac{3}{2}\sin(2x)\ln|\csc(x) - \cot(x)|$

b) $y = (c_1 + c_2 x)e^x + x \ln|x| e^x$

7. Ecuaciones diferenciales tipo Euler

Ejercicio 7.1:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales no homogénea con coeficientes variables

$$\text{a)}\ \ x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(x)\ \ ;\ \ \text{b)}\ \ x^3y''' - 4x^2y'' + 8xy' - 8y = 4\ln(x)\ \ ;$$

$$\text{c)}\ \ x^3y^{(3)} + 5x^2y^{(2)} + 4xy^{(1)} + 2y^{(0)} = 0\ \ ;\ \ \text{d)}\ \ (1+x)^2y'' - 3(1+x)y' + 4y = (1+x)^3$$

Solución:

a)

Solución homogénea

Sea $y = x^r \;\Rightarrow\; y' = rx^{r-1} \;\Rightarrow\; y'' = r(r-1)x^{r-2}$; sustiruyendo en la ecuación diferencial homogénea

$$x^r[r(r-1) + 4r + 2] = 0 \;\Rightarrow\; r^2 + 3r + 2 = 0 \;\Rightarrow\; (r+1)(r+2) = 0 \;\Rightarrow\; y_h = c_1x^{-1} + c_2x^{-2}$$

Solución particular: por variación de parámetros

$$y_p = u_1(x)x^{-1} + u_2(x)x^{-2} \;\Rightarrow\; y_p' = -\frac{u_1}{x^2} - \frac{u_2}{x^3} + \left(\frac{u_1'}{x} + \frac{u_2'}{x^2}\right)\ \ ;\ \ \text{Sea}\ \boxed{\frac{u_1'}{x} + \frac{u_2'}{x^2} = 0}\ \ I$$

$$y_p' = -\frac{u_1}{x^2} - \frac{u_2}{x^3} \;\Rightarrow\; y_p'' = 2\frac{u_1}{x^3} + 6\frac{u_2}{x^4} - \frac{u_1'}{x^2} - 2\frac{u_2'}{x^3}\ \ ;\ \ \text{sustituyendo en la ecuación diferencial no homogénea}$$

$$\boxed{-u_1' - 2\frac{u_2'}{x} = \ln(x)}\ \ II \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 1/x & 1/x^2 \\ -1 & -2/x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ln(x) \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{array}{c} u_1' = \ln(x) \\ u_2' = -x\ln(x) \end{array} \;\Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} u_1 = x\left(\ln(x) - 1\right) + c_4 \\ u_2 = \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \ln(x)\right) + c_3 \end{array} \;\Rightarrow\; y_p = \ln(x) - 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \ln(x)\right) = \ln(\sqrt{x}) - \frac{3}{4} \;\Rightarrow$$

$$y = c_1x^{-1} + c_2x^{-2} + \ln(\sqrt{x}) - \frac{3}{4}$$

b)

Solución homogénea

$$y = x^r \;\Rightarrow\; y' = rx^{r-1} \;\Rightarrow\; y'' = r(r-1)x^{r-2} \;\Rightarrow\; y''' = r(r-1)(r-2)x^{r-3}$$

$$x^r[r(r-1)(r-2) - 4r(r-1) + 8r - 8] = 0 \;\Rightarrow\; r^3 - 7r^2 + 14r - 8 = 0 \;\Rightarrow\; (r-1)(r-2)(r-4) = 0 \;\Rightarrow$$

$$y_h = c_1x + c_2x^2 + c_3x^4$$

Solución particular: por variación de parámetros

$$y_p = u_1x + u_2x^2 + u_3x^4 \quad \Rightarrow \quad y_p' = u_1 + 2xu_2 + 4x^3u_3 + (xu_1' + x^2u_2' + x^4u_3') \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} y_p' = u_1 + 2xu_2 + 4x^3u_3 \\ \boxed{xu_1' + x^2u_2' + x^4u_3' = 0} \quad I \end{array}$$

$$y_p'' = 2u_2 + 12x^2u_3 + u_1' + 2xu_2' + 4x^3u_3' \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} y_p'' = 2u_2 + 12x^2u_3 \\ \boxed{u_1' + 2xu_2' + 4x^3u_3' = 0} \quad II \end{array} \quad \Rightarrow \quad y_p''' = 24xu_3 + 2u_2' + 12x^2u_3'$$

Sustituyendo

$$\boxed{2x^3u_2' + 12x^5u_3' = 4\ln(x)} \quad III$$

$$\begin{bmatrix} x & x^2 & x^4 \\ 1 & 2x & 4x^3 \\ 0 & 2x^3 & 12x^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4\ln(x) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} u_1' = \frac{4\ln(x)}{3x^2} \\ u_2' = -\frac{\ln(x)}{x^3} \\ u_3' = \frac{2\ln(x)}{3x^5} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} u_1 = \frac{-4(\ln(x)+1)}{3x} \\ u_2 = \frac{2\ln(x)+1}{2x^2} \\ u_3 = \frac{-4\ln(x)-1}{24x^4} \end{array} \quad \Rightarrow \quad y_p = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - \frac{7}{8}$$

$$y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^4 + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - \frac{7}{8}$$

c)

$$y = x^r \quad \Rightarrow \quad y' = rx^{r-1} \quad \Rightarrow \quad y'' = r(r-1)x^{r-2} \quad \Rightarrow \quad y''' = r(r-1)(r-2)x^{r-3}$$

$$(r+2)(r^2+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 + i1 \\ 0 - i1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = c_1x^{-2} + c_2x^0\cos(1\ln(x)) + c_3x^0\sin(1\ln(x))$$

d)

$$1 + x = e^t \quad ; \quad t = \ln(1+x) \quad ; \quad y(x(t)) \quad ; \quad y'(x) = e^{-t}y'(t) \quad ; \quad y''(x) = e^{-2t}(y''(t) - y'(t))$$

$$e^{2t}e^{-2t}(y''(t) - y'(t)) - 3e^te^{-t}y'(t) + 4y(t) = e^{3t} \quad \Rightarrow \quad y'' - 4y' + 4y = e^{3t}$$

Solución homogénea

$$k^2 - 4k + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} \quad \Rightarrow \quad y_h(x) = c_1(1+x)^2 + c_2(1+x)^2\ln(1+x)$$

Solución no homogénea: por coeficientes indeterminados

$$y_p = Ae^{3t} \quad \Rightarrow \quad y_p' = 3Ae^{3t} \quad \Rightarrow \quad y_p'' = 9Ae^{3t} \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

$$y_p = e^{3t} \quad \Rightarrow \quad y_p = (1+x)^3 \quad \Rightarrow \quad y = c_1(1+x)^2 + c_2(1+x)^2\ln(1+x) + (1+x)^3$$

Respuesta:

a) $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2} + \ln(\sqrt{x}) - \frac{3}{4}$

b) $y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^4 + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - \frac{7}{8}$

c) $y = c_1 x^{-2} + c_2 \cos(\ln(x)) + c_3 \sin(\ln(x))$

d) $y = c_1(1+x)^2 + c_2(1+x)^2\ln(1+x) + (1+x)^3$

Nota: si r es una raíz real de la ecuación característica, con grado de multiplicidad m (es decir, cuantas veces se repite), a ella le corresponden m soluciones linealmente independientes, de la forma

$$y_1 = x^r \quad , \quad y_2 = x^r \ln(x) \quad , \quad y_3 = x^r \ln(x)^2 \quad , \quad \cdots \quad , \quad y_m = x^r \ln(x)^{m-1}$$

Si $\alpha + i\beta$ es un par de raíces complejas de grado m de multiplicidad, a ellas les corresponderán $2m$ soluciones linealmente independientes de la forma

$$y_1 = x^\alpha \cos(\beta \ln(x)) \quad , \quad y_2 = x^\alpha \sin(\beta \ln(x)) \quad ,$$

$$y_3 = x^\alpha \ln(x) \cos(\beta \ln(x)) \quad , \quad y_4 = x^\alpha \ln(x) \sin(\beta \ln(x)) \quad ,$$

$$\vdots$$

$$y_{2m-1} = x^\alpha \ln(x)^{m-1} \cos(\beta \ln(x)) \quad , \quad y_{2m} = x^\alpha \ln(x)^{m-1} \sin(\beta \ln(x))$$

8. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

La apariencia general de los sistemas es la siguiente $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{g}(t)$. Donde $\vec{x}$ es un vector $n \times 1$ que contiene todas las variables del sistema a estudiar y $\vec{g}(t)$ es otro vector $n \times 1$ que contiene los términos forzantes del sistema, la matriz A de $n \times n$ términos es la que se encarga de relacionar todas las variables del sistema $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ contenidas en el vector $\vec{x}$, para nuestros fines la matriz A será siempre constante, esto quiere decir que los sistemas de ecuaciones a resolver bien pueden modelar sistemas físicos lineales.

$$\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{g}(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

Si $\vec{g}(t) = \vec{0}$ tenemos un sistema homogéneo con una solución homogénea, si $\vec{g}(t) \neq \vec{0}$ tenemos un sistema no homogéneo con una solución homogénea y una particular.

Las soluciones vienen expresadas de la siguiente forma

$$\vec{x} = \underbrace{c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t) + \cdots + c_n\vec{x}_n}_{\text{Solución homogénea}} + \underbrace{\vec{v}_1(t) + \vec{v}_2(t) + \cdots + \vec{v}_n(t)}_{\text{Solución no homogénea}}$$

Una ecuación diferencial de orden n, lineal, de coeficientes constantes puede reescribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales lineal con una matriz A de $n \times n$ términos. A continuación un ejemplo para una ecuación de cuarto orden, ignore los signos de los coeficientes y su orden, fueron seleccionados solo por la estética del resultado final. Tanto y como los x_i son funciones de t.

$$y^{(4)} - dy^{(3)} - cy^{(2)} - by^{(1)} - ay^{(0)} = f(t) \quad I$$

$$\begin{matrix} x_1 = y^{(0)} & & x_1' = y^{(1)} = x_2 & & \boxed{x_1' = x_2} \\ x_2 = y^{(1)} & \Rightarrow & x_2' = y^{(2)} = x_3 & \Rightarrow & \boxed{x_2' = x_3} \\ x_3 = y^{(2)} & & x_3' = y^{(3)} = x_4 & & \boxed{x_3' = x_4} \\ x_4 = y^{(3)} & & & & \end{matrix}$$

Sustituyendo los primeros cambios en I

$$x_4' - dx_4 - cx_3 - bx_2 - ax_1 = f(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_4' = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + f(t)}$$

Ya tenemos el sistema, falta expresarlo apropiadamente

$$\begin{aligned} x_1' &= 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\ x_2' &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\ x_3' &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 \\ x_4' &= a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 + d \cdot x_4 + f(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & c & d \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

Ejercicio 8.1

Resolver en su totalidad los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

$$\text{a)}\ \vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} \quad ; \quad \text{b)}\ \vec{x}' = A\vec{x} \ , \ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{c)}\ \vec{x}' = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} \ , \ \vec{x}(0) \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Solución:

a)

Suponemos una solución de la forma $\vec{x} = \vec{a}e^{rt} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}' = re^{rt}\vec{a}$, sustituyendo en la ecuación (sistema) tenemos $re^{rt}\vec{a} = A\vec{a}e^{rt} \quad ; \quad e^{rt} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A\vec{a} - r\vec{a} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad (A - rI)\vec{a} = \vec{0}$. Este sistema tiene solución si $|A - rI| = 0$

$$\begin{vmatrix} -1-r & 1 \\ 0 & -1-r \end{vmatrix} = (r+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = -1$$

<u>Sea $r = -1$</u>

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a_2 = 0 \\ a_1 \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad ; \ \text{Sea} \ \ a_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{x}_1 = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Esta es la primera solución, la segunda debemos plantearla (suponer que es) de la forma $\vec{x}_2 = (\vec{a} + t\vec{b})e^{-t}$, entonces $\vec{x}_2' = (\vec{b} - t\vec{b} - \vec{a})e^{-t}$ sustituyendo y simplificando en el sistema

$$\vec{b} - t\vec{b} - \vec{a} = A\vec{a} + tA\vec{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} A\vec{a} + \vec{a} = \vec{b} \\ \\ A\vec{b} + \vec{b} = \vec{0} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} (A - (-1)I)\vec{a} = \vec{b} \quad I \\ \\ (A - (-1)I)\vec{b} = \vec{0} \quad II \end{matrix}$$

De II tenemos el resultado de que $\vec{b}$ es autovector de A si $\lambda = -1 \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, entonces regresando a I con esta información nos queda el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} c_2 = 1 \\ \\ c_1 \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad ; \ \text{Sea} \ \ c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = e^{-t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{x}_2 = e^{-t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\vec{x} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$(A-\lambda I)\vec{x}=\vec{0}\ \ ;\ \ |A-\lambda I|=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda^3-3\lambda^2+7\lambda-5=0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda-1)(\lambda-(1\pm i2))=0$$

<u>Sea $\lambda=1$</u>

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&-2\\3&2&0\end{bmatrix}\vec{a}=\vec{0}\ \ ;\ \ \begin{matrix}f_3=f_1\\f_1=f_2\\f_2=f_3\end{matrix} \quad\Rightarrow\quad f_1=f_1/2 \quad\Rightarrow\quad f_2=-3f_1+f_2 \quad\Rightarrow\quad f_2=f_2/2 \quad\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&3/2\\0&0&0\end{bmatrix}\vec{a}=\vec{0} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}a_1-a_3=0\\ a_2+\frac{3}{2}a_3=0\\ a_3\in\mathbb{R}\ \ \text{Sea}\ \ a_3=2\end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}a_1=2\\a_2=-3\end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \vec{a}=\begin{bmatrix}2\\-3\\2\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{x}_1=e^t\begin{bmatrix}2\\-3\\2\end{bmatrix}}$$

<u>Sea $\lambda=1-i2$</u>

$$\begin{bmatrix}i2&0&0\\2&i2&-2\\2&2&i2\end{bmatrix}\vec{b}=\vec{0} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&i\\0&0&0\end{bmatrix}\vec{b}=\vec{0} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}b_1=0\\b_2+ib_3=0\\b_3\in\mathbb{R}\ \ \text{Sea}\ \ b_3=-1 \quad\Rightarrow\quad b_2=i\end{matrix} \quad\Rightarrow$$

$$\vec{b}=\begin{bmatrix}0\\i\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\vec{b}_r+i\vec{b}_i \quad\Rightarrow$$

$$\vec{x}_p=\vec{b}e^{(1-i2)t}=\left(\vec{b}_r+i\vec{b}_i\right)e^te^{-i2t}=e^t\left[\left(\vec{b}_r\cos(2t)+\vec{b}_i\sin(2t)\right)+i\left(\vec{b}_i\cos(2t)-\vec{b}_r\sin(2t)\right)\right]$$

$$\boxed{\vec{x}_2=\mathrm{Re}\{\vec{x}_p\}=e^t\left(\begin{bmatrix}0\\0\\-\cos(2t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\sin(2t)\\0\end{bmatrix}\right)}\ \ ;\ \ \boxed{\vec{x}_3=\mathrm{Im}\{\vec{x}_p\}=e^t\left(\begin{bmatrix}0\\\cos(2t)\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\\sin(2t)\end{bmatrix}\right)}$$

$$\vec{x}=c_1e^t\begin{bmatrix}2\\-3\\2\end{bmatrix}+c_2e^t\begin{bmatrix}0\\\sin(2t)\\-\cos(2t)\end{bmatrix}+c_3e^t\begin{bmatrix}0\\\cos(2t)\\\sin(2t)\end{bmatrix}$$

c)

$$\vec{x} = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} \sin(t) - \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}(0) = c_1 \cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} c_2 = -3 \\ \\ c_1 = -2 \end{matrix}$$

$$\vec{x} = e^{-2t} \begin{bmatrix} -2\cos(t) - 2\sin(t) - 3\sin(t) + 3\cos(t) \\ -2\cos(t) - 3\sin(t) \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos(t) - 5\sin(t) \\ -2\cos(t) - 3\sin(t) \end{bmatrix}$$

Respuesta:

a) $\vec{x} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\vec{x} = c_1 e^{t} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{t} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{bmatrix} + c_3 e^{t} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{bmatrix}$

c) $\vec{x} = e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos(t) - 5\sin(t) \\ -2\cos(t) - 3\sin(t) \end{bmatrix}$

tarea:

$$\text{a)} \quad \vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} \quad ;$$

$$\text{Respuesta:} \quad \vec{x} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ -t+1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)} \quad \vec{x}' = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} \quad ;$$

$$\text{Respuesta:} \quad \vec{x} = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ \cos(\sqrt{2}t) \\ -\cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \end{bmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ \sin(\sqrt{2}t) \\ \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) - \sin(\sqrt{2}t) \end{bmatrix}$$

Ejercicio 8.2:

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneos

$$\text{a)}\;\; \vec{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} -2e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} \;\; ; \;\; \text{b)}\;\; \vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^{t} \\ \sqrt{3}e^{-t} \end{bmatrix}$$

Solución:

a)

<u>Solución homogénea:</u> $\vec{x}' = A\vec{x} \quad I$

$$|A - \lambda I| = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; (\lambda - 2)^2 = 0$$

<u>Sea $\lambda = 2$</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \vec{a} = \vec{0} \;\;\Rightarrow\;\; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \vec{0} \;\;\Rightarrow\;\; \begin{matrix} a_1 = -a_2 \\ \\ a_2 \in \mathbb{R} \end{matrix} \;\;\Rightarrow\;\; \begin{matrix} a_2 = 1 \\ \\ a_1 = -1 \end{matrix} \;\;\Rightarrow\;\; \vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\vec{x}_1 = e^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\vec{x}_2 = \left(\vec{b} + t\vec{c}\right) e^{2t} \;\;\Rightarrow\;\; \vec{x}_2 = \vec{b}e^{2t} + t\vec{c}e^{2t} \;\;\Rightarrow\;\; \vec{x}_2' = 2\vec{b}e^{2t} + \vec{c}e^{2t} + 2t\vec{c}e^{2t} \;\; ; \;\; \text{en} \quad I$$

$$\left(2\vec{b} + \vec{c} + 2t\vec{c}\right) e^{2t} = A\left(\vec{b} + t\vec{c}\right) e^{2t} \;\;\Rightarrow\;\; \begin{matrix} 2\vec{b} + \vec{c} = A\vec{b} \\ \\ 2t\vec{c} = At\vec{c} \end{matrix} \;\;\Rightarrow\;\; \begin{matrix} (A - 2I)\vec{b} = \vec{c} \\ \\ (A - 2I)\vec{c} = \vec{0} \end{matrix} \quad \Leftarrow \;\; \vec{c} \;\text{ es autovector de } A \text{ si } \lambda = 2$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\;\Rightarrow\;\; (A - 2I)\vec{b} = \vec{c} \;\;\Rightarrow\;\; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\;\Rightarrow\;\; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\;\Rightarrow$$

$$\begin{matrix} b_1 + b_2 = -1 \\ \\ b_2 \in \mathbb{R} \end{matrix} \;\;\Rightarrow\;\; \begin{matrix} b_2 = 0 \\ \\ b_1 = -1 \end{matrix} \;\;\Rightarrow\;\; \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\;\Rightarrow\;\; \boxed{\vec{x}_2 = e^{2t}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$$

$$\boxed{\vec{x}_h = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$$

Solución no homogénea $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{g}(t)$

Matriz fundamental $\psi(t) = \begin{bmatrix} -e^{2t} & -e^{2t}(t+1) \\ e^{2t} & te^{2t} \end{bmatrix}$; $\psi(t)$ tiene inversa si $|\psi(t)| \neq 0$; $|\psi(t)| = e^{4t} \Rightarrow$

$$\psi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \frac{1}{|\psi(t)|} = \begin{bmatrix} e^{2t}t & (t+1)e^{-2t} \\ -e^{-2t} & -e^{-2t} \end{bmatrix} \Rightarrow \psi^{-1}(t) \cdot \vec{g}(t) = \begin{bmatrix} 1-t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\int \psi^{-1}(t) \cdot \vec{g}(t)dt = \begin{bmatrix} t - \frac{t^2}{2} \\ t \end{bmatrix} \Rightarrow \psi(t) \int \psi^{-1}(t) \cdot \vec{g}(t)dt = \begin{bmatrix} -2te^{2t} - \frac{t^2e^{2t}}{2} \\ te^{2t} + \frac{t^2e^{2t}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\vec{x}_p = e^{2t}t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t}t^2 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}}$$

$$\vec{x} = c_1e^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^{2t} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + e^{2t}t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t}t^2 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

b)

$$\boxed{\vec{x}_h = c_1e^{2t} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}} \; ; \; |\psi(t)| = -4 \; ; \; \psi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4}e^{-2t} & \frac{1}{4}e^{-2t} \\ \frac{1}{4}e^{2t} & \frac{-\sqrt{3}}{4}e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\psi^{-1} \cdot \vec{g}(t) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{3}e^{-t} + \sqrt{3}e^{-3t} \\ e^{3t} - 3e^{t} \end{bmatrix} \Rightarrow \int \psi^{-1} \cdot \vec{g}(t)dt = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{4}e^{-t} - \frac{\sqrt{3}}{12}e^{-3t} \\ \frac{1}{12}e^{3t} - \frac{3}{4}e^{t} \end{bmatrix}$$

$$\psi(t) \int \psi^{-1} \cdot \vec{g}(t)dt = \begin{bmatrix} -e^{-t} - \frac{2}{3}e^{t} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-t} - \frac{\sqrt{3}}{3}e^{t} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{x}_p = e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} + e^{t} \begin{bmatrix} -2/3 \\ -\sqrt{3}/3 \end{bmatrix}}$$

$$\vec{x} = c_1e^{2t} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} + e^{t} \begin{bmatrix} -2/3 \\ -\sqrt{3}/3 \end{bmatrix}$$

Respuesta:

a) $\vec{x} = c_1e^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^{2t} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + e^{2t}t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t}t^2 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

b) $\vec{x} = c_1e^{2t} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} + e^{t} \begin{bmatrix} -2/3 \\ -\sqrt{3}/3 \end{bmatrix}$

Tarea:

$$\begin{matrix} \frac{d^2y}{dx^2} + 2y + 4z = e^x \\ \frac{d^2z}{dx^2} - y - 3z = -x \end{matrix} \; ; \; \text{Respuesta:} \; \begin{matrix} y = c_1e^{x\sqrt{2}} + c_2e^{-x\sqrt{2}} + c_3\cos(x) + c_4\sin(x) + e^x - 2x \\ z = -c_1e^{x\sqrt{2}} - c_2e^{-x\sqrt{2}} - \frac{c_3}{4}\cos(x) - \frac{c_4}{4}\sin(x) - \frac{1}{2}e^x + x \end{matrix}$$